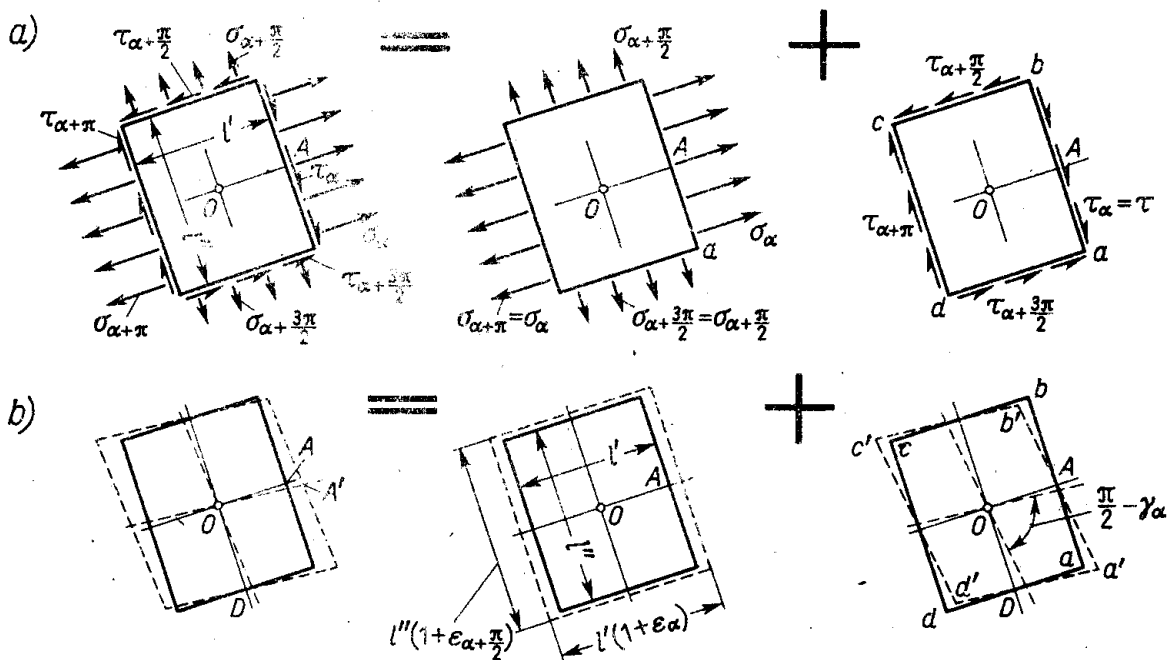


3 SKRĘCANIE PRĘTÓW

3.1. Stan czystego ścinania

Badając stan rozciągania otrzymaliśmy na bokach myślowo wyciętej kostki (rys. 2.15 i 2.17) złożone obrazy naprężeń i odkształceń. Obrazy te uprościmy przez ich rozkład na stany prostsze. I tak układ naprężeń (rys. 3.1a) jest superpozycją dwóch składników. Pierwszy z nich to rozciąganie kostki w dwóch prostopadłych kierunkach naprężeniami $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha+\pi}$ i $\sigma_{\alpha+(\pi/2)} = \sigma_{\alpha+(3\pi/2)}$. Drugi stan, tzw. *czystego ścinania*, to działanie samych naprężeń stycznych równych co do wartości, równomiernie rozłożonych na bokach i parami skierowanych do wspólnej krawędzi, tj. a i c , albo od niej, tj. b i d . Po takim omówieniu, do opisanie tego stanu wystarczy podanie wartości naprężeń τ działających tylko na jednym boku, np. ab .



Rys. 3.1. Wyodrębnienie stanu czystego ścinania i odkształcenia postaciowego

Obecnie zbadamy właściwości stanu czystego ścinania, gdy istnieje on oddzielnie od pozostałych. Przede wszystkim stwierdzamy, że kostka jest w równowadze, gdyż od razu widać, że sumy rzutów na kierunki cd i da są tożsamościowo równe zeru, i podobnie suma

momentów względem krawędzi d

$$(\tau_{\alpha} l'' h) l' - (\tau_{\alpha + (\pi/2)} l' h) l'' = \tau h (l'' l' - l' l'') \equiv 0,$$

gdzie h — wysokość kostki prostopadle do płaszczyzny rysunku.

Analogicznie rozkładamy obraz odkształceń (rys. 3.1b) na dwa składniki. Pierwszy z nich cechuje się zmianą wymiarów z zachowaniem kątów prostych w narożach kostki. W stanie drugim, tzw. *czystego odkształcenia postaciowego*, zachodzi tylko zmiana prostego kąta AOD bez zmiany wymiarów. Zauważmy teraz, że między składnikami naprężeń i odkształceń istnieje korelacja. Wynika ona z zasady superpozycji, a mianowicie że skutek (odkształcenie) jest proporcjonalny do przyczyny (naprężenia) zawsze, a więc niezależnie od sposobu wycięcia kostki, czyli kąta α . Taką proporcjonalność obserwujemy między kątem γ_{α} i τ_{α} (wzór 2.15). Podobnie łatwo dowieść istnienia liniowej zależności między ε_{α} i $\varepsilon_{\alpha + (\pi/2)}$ (wzory g i h art. 2.5) a naprężeniami σ_{α} i $\sigma_{\alpha + (\pi/2)}$ (wzory c art. 2.5). Natomiast przy powiązaniu składników obrazu naprężeń i odkształceń „na krzyż” tej proporcjonalności nie ma. W rezultacie otrzymujemy, że za zmianę wymiarów liniowych odpowiedzialny jest układ σ_{α} i $\sigma_{\alpha + (\pi/2)}$, a za *czyste odkształcenie postaciowe odpowiedzialny jest tylko drugi układ, czyli stan czystego ścinania*.

Ten ogólny związek wielkości τ_{α} i γ_{α} uwidaczniamy, opuszczając w (2.15) wskaźnik α . W rezultacie mamy

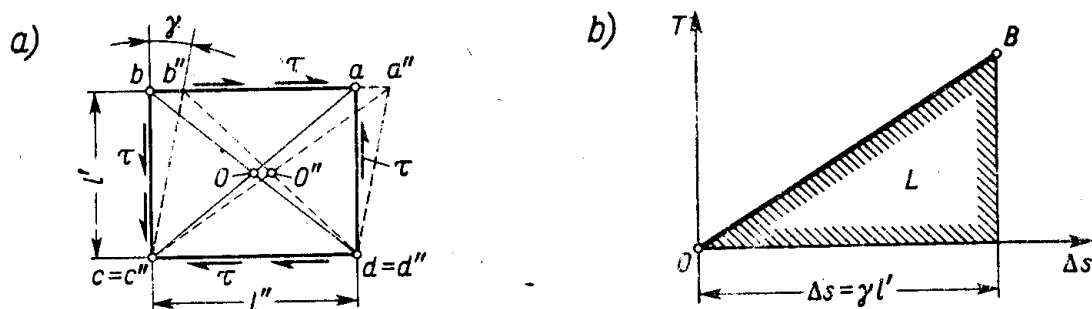
$$\gamma = \frac{2\tau(1+\nu)}{E} = \frac{\tau}{G}, \quad (3.1)$$

gdzie G oznacza tzw. *moduł sprężystości postaciowej*,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.2)$$

Jak widać, moduł G jest związany z modułem Younga E i liczbą Poissona ν . Jeśli więc znane są dwie z tych wielkości, to trzecia jest już znana z zależności (3.2).

Wzór (3.1) ma postać i fizyczny sens podobne do prawa Hooke'a przy rozciąganiu. Z tego powodu nazywamy go *prawem Hooke'a przy ścinaniu*, w którym dwie wielkości, tj. τ i γ , nie wiążą się już z prętem, lecz elementarną kostką. Sposób unieruchomienia



Rys. 3.2. Parametry stanu czystego ścinania

kostki, jako sztywnej całości, jest rzeczą obojętną. Zamiast rysować ją, jak na rys. 3.1b, możemy przedstawić w ten sposób, że bok cd zostaje nieruchomy, środek O przesuwa się do O'' , a przekątne db i ca zajmują położenie db'' i ca'' (rys. 3.2a). Widać, że przesunięcie O'' do O i obrót kostki, jako sztywnej całości, daje obraz poprzedni (rys. 3.1b).

Wykorzystując zależność (3.1) określimy energię odkształcenia w stanie czystego ścinania kostki (rys. 3.2a) o wymiarach l' , l'' oraz wysokości h . Jeśli τ stopniowo wzrasta, to proporcjonalnie rosną siła $T = \tau l'' h$ na ścianie ab oraz przesunięcie $\Delta s = aa' \approx \gamma l' = \tau l' / G$ tej ściany, a wykres $T(\Delta s)$ jest linią prostą (rys. 3.2b). Łatwo zauważyć, że tylko ta siła wykonuje pracę, albowiem bok cd jest nieruchomy, a na bokach bc i da przesunięcia są z dokładnością do małych wyższego rzędu prostopadłe do odpowiednich sił. Ta praca L , podobnie jak w przypadku rozciągania (rys. 2.12), jest równa polu OBC , czyli

$$L = \frac{1}{2} T \Delta s = \tau^2 l' l'' h / 2G.$$

Ponieważ materiał jest sprężysty, zatem praca ta zamienia się całkowicie na potencjalną energię odkształcenia U , skąd

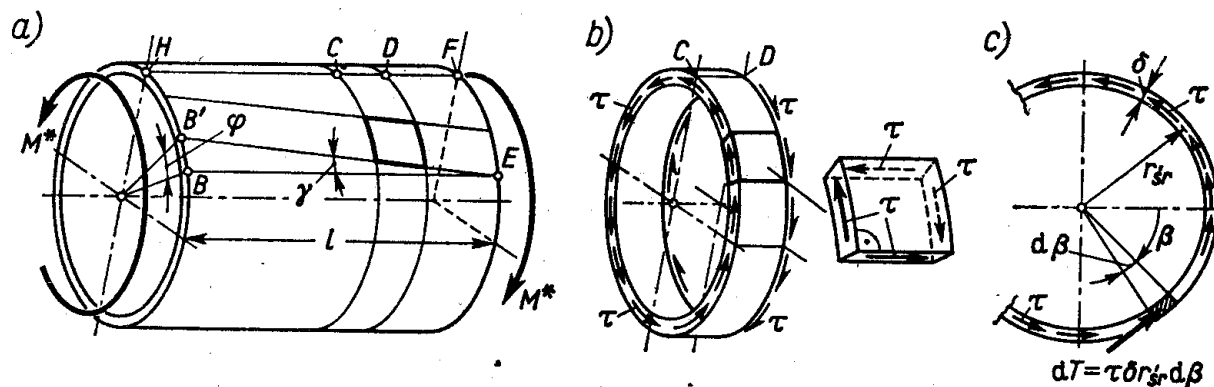
$$U = L = \tau^2 l' l'' h / 2G. \quad (3.3)$$

Przez analogię do rozciągania, wprowadzamy pojęcie właściwej energii odkształcenia U' w stanie czystego ścinania, czyli

$$U' = U / l' l'' h = \tau^2 / 2G \quad \text{lub} \quad U' = G \gamma^2 / 2. \quad (3.4)$$

Z pojęcia tego będziemy korzystać w dalszych rozważaniach.

W powyższych rozważaniach stan czystego ścinania wyodrębniono jako składnik innego stanu (rys. 3.1). Powstaje pytanie, czy można zrealizować stan czystego ścinania bez innych składników? Odpowiedź na to jest twierdząca. Jeden ze sposobów (rys. 3.3a) polega na obciążeniu cienkościennej kołowej rury przeciwnymi momentami M^* . W obranym przekroju C działają naprężenia styczne τ , stałe⁽¹⁾ wzdłuż grubości δ i z racji osiowej



Rys. 3.3. Typowa realizacja stanu czystego ścinania

symetrii jednakowe na całym obwodzie. Ich wartość określamy z równowagi myślowo odciętej części CF rury. Elementarna siła $dT = \tau \delta r_{sr} d\beta$ (rys. 3.3c) daje względem środka moment: $dT r_{sr} = \tau \delta r_{sr}^2 d\beta$. Całkowity moment wszystkich takich sił

$$\int_0^{2\pi} \tau \delta r_{sr}^2 d\beta = \tau 2\pi \delta r_{sr}^2$$

⁽¹⁾ Dokładność tego założenia jest tym lepsza, im mniejszy jest stosunek δ / r_{sr} (zadanie 1 art. 3.3). Zbytne jednak zmniejszenie stosunku δ / r_{sr} jest niemożliwe, z uwagi na zjawisko utraty stateczności (rozdz. 15).

równowazy moment M^* działający w przekroju F , skąd

$$\tau = \frac{M^*}{2\pi r_{sr}^2 \delta} \quad (3.5)$$

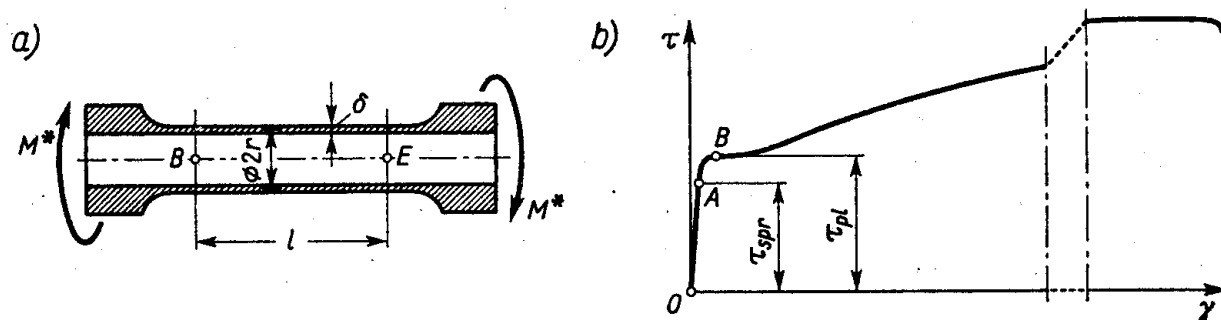
Ten sam wynik otrzymamy badając naprężenia w przekroju D dla części HD rury. Obraz naprężeń działających na pierścień CD i na wycięty z niego element (rys. 3.3b) wykazuje, że mamy tu czyste ścinanie. Element ten oraz wszystkie inne ulegają skoszeniu o kąt γ , a tworząca BE staje się linią śrubową $B'E$. Dla całej rury oznacza to obrót przekroju B względem przekroju E o kąt φ określony zależnością

$$\varphi r_{sr} = BB' = \gamma l,$$

skąd

$$\varphi = \gamma l / r_{sr}. \quad (3.6)$$

Zależności (3.5) i (3.6) umożliwiają doświadczalne określenie przebiegu $\tau(\gamma)$. Działając na osiowosymetryczną próbkę (rys. 3.4a) wzrastającymi momentami M^* mierzymy odpowiadające im wartości kąta φ na pomiarowej długości l . Wstawiając te wyniki pomiarów do (3.5) i (3.6) wyznaczamy odpowiadające sobie wartości τ i γ . Otrzymany w ten sposób wykres (rys. 3.4b) wykazuje duże podobieństwo do wykresu rozciągania tego samego



Rys. 3.4. Wykres naprężeń τ w funkcji γ

materiału. I tak liniową zależność $\tau(\gamma)$ wyrażoną prawem Hooke'a (3.1) obserwuje się tylko do pewnej wartości $\tau = \tau_{prop}$, tzw. *granicy proporcjonalności przy czystym ścinaniu*. Podobnie jak przy rozciąganiu, można wprowadzić pojęcia granic: sprężystości τ_{spr} , plastyczności τ_{pl} itd. Okazuje się zarówno z teorii plastyczności jak i badań doświadczalnych, że wszystkie te wielkości są ściśle związane z wielkościami charakterystycznymi dla rozciągania. Tak na przykład dla metali stosunek τ_{prop} , τ_{spr} , τ_{pl} odpowiednio do σ_{prop} , σ_{spr} , R_e jest stały i równy $\sim 0,58$, tzn.

$$\tau_{prop}/\sigma_{prop} = \tau_{spr}/\sigma_{spr} = \tau_{pl}/R_e \approx 0,58. \quad (3.7)$$

Informację (3.7) wykorzystamy do określenia dopuszczalnych naprężeń. Jeśli wymagany współczynnik bezpieczeństwa w odniesieniu do τ_{pl} ma być równy n_e , to *dopuszczalne naprężenie styczne* $\tau = k_t$ w stanie czystego ścinania jest

$$k_t = \tau_{pl}/n_e \approx 0,58 R_e/n_e = 0,58 k_r, \quad (3.8)$$

gdzie $k_r = R_e/n_e$ jest to dopuszczalne dla danego materiału naprężenie przy rozciąganiu. Bardziej ogólne ujęcie tej kwestii podano w rozdz. 8.

Zadania

1. W kostce (rys. 3.2a), w której $l' = l'' = 10$ cm, zmierzono przemieszczenie $\Delta s = \overline{bb''} = 0,192$ mm wywołane naprężeniami $\tau = 51$ MPa. Jaki jest moduł G materiału i jaka liczba Poissona, jeśli $E = 7,0 \cdot 10^4$ MPa?

Odp. $\gamma \approx \overline{bb''}/bc = \Delta s/l' = 1,92 \cdot 10^{-3}$ rad, $G = \tau/\gamma = 2,66 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = (E/2G) - 1 = 0,32$.

2. W jednej z książek podano dla uranu: $E = 1,9 \cdot 10^6$ kG/cm², $G = 0,5 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,28$. Czy tym danym można wierzyć?

Odp. Nie. Według (1.11b): $0 < \nu < 0,5$. Dla tych granicznych wartości ν mamy z wzoru (3.2), że $0,33 < (G/E) < 0,50$, tymczasem tutaj $G/E \approx 0,26$. Jeśli zawierzyć, że E i ν są podane prawidłowo, to $G = 0,74 \cdot 10^6$ kG/cm² = $0,72 \cdot 10^5$ MPa.

3. Tę samą kostkę obciążono raz na rozciąganie, drugi raz na ścinanie. Liczbowe wartości σ i τ są równe. Czy właściwa energia będzie też ta sama?

Odp. Nie. Stosunek $U'_\tau/U'_\sigma = E/G = 2(1+\nu) > 2$.

4. Rura stalowa ($G = 8,1 \cdot 10^4$ MPa) o długości $l = 2$ m obciążona jak na rys. 3.3a momentami $M^* = 40 \cdot 10^3$ Nm ma mieć w stosunku do τ_{p1} współczynnik bezpieczeństwa $n_e = 3,0$ oraz kąt φ obrotu końcowych przekrojów co najwyżej równy $0,4^\circ$. Wyznaczyć wymiary przekroju rury, jeśli $R_e = 220$ MPa.

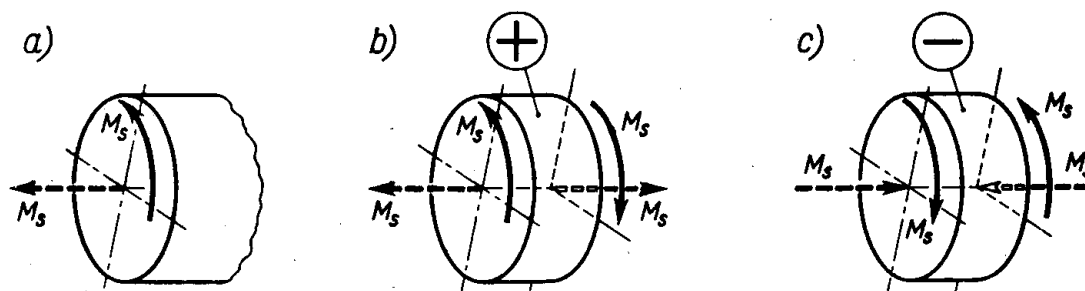
Odp. Z warunku $\tau < k_t = 0,58 R_e/n_e = 42,5$ MPa i $\gamma = \tau/G = k_t/G = 0,525 \cdot 10^{-3}$ rad; po podstawieniu do (3.6) mamy $r_{sr} = \gamma l/\varphi = 15,04$ cm $\approx 15,0$ cm, gdzie $\varphi = \pi 0,4^\circ/180^\circ = 6,98 \cdot 10^{-3}$ rad. Z wzoru (3.5) $\delta = M^*/2\pi r_{sr}^2 k_t = 0,67$ cm ≈ 7 mm.

5. Obliczyć ilość energii odkształcenia w rurze z zadania 4.

Odp. Z wzoru (3.4): $U' = 1,12 \cdot 10^4$ J/m³, objętość rury $V = 2\pi r_{sr} l \delta = 1,32 \cdot 10^{-2}$ m³, skąd $U = U' \cdot V = 141$ J.

3.2. Skręcanie prętów. Wykresy momentów skręcających

Nawiązując do art. 1.4 przypominamy, że drugi prosty przypadek pracy pręta stanowi skręcanie, przy którym w przekroju działa jedynie moment skręcający M_s o wektorze pokrywającym się z osią pręta. Moment M_s uważamy za dodatni, gdy jego wektor skiero-



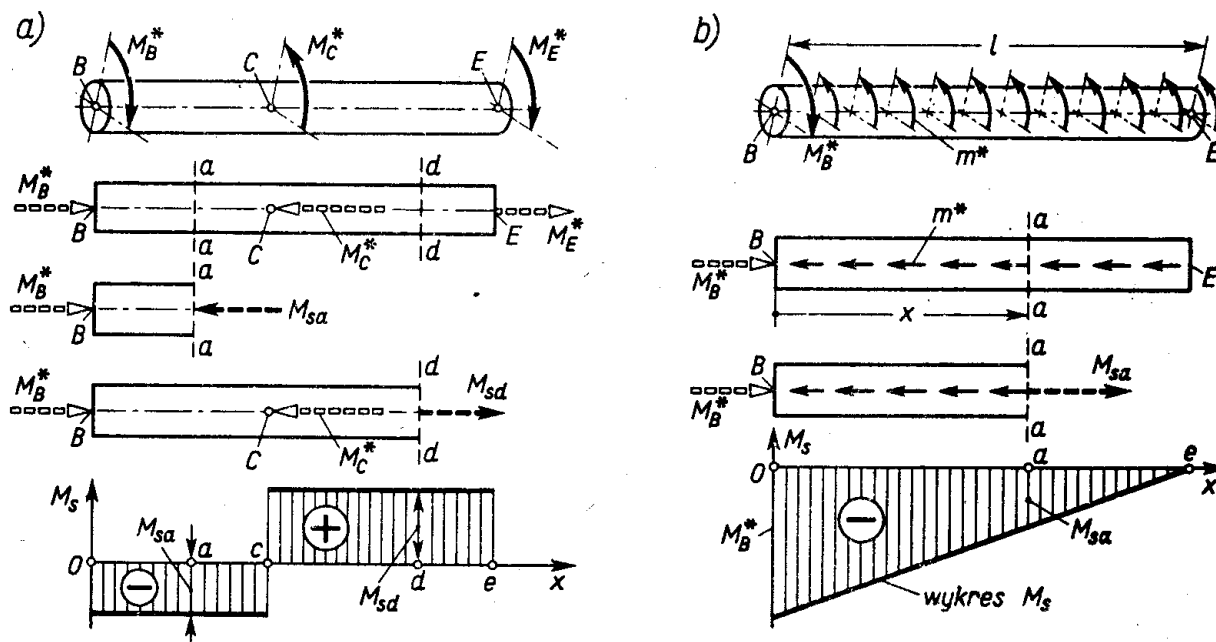
Rys. 3.5. Definicja znaków momentów skręcających

wany jest na zewnątrz przekroju badanej części pręta (rys. 3.5a). Przy tej umowie wektory dodatnich M_s dla odcinka pręta wykazują analogię z siłami rozciągającymi (rys. 3.5b), a dla ujemnych M_s (rys. 3.5c) analogię z siłami ściskającymi.

Weźmy teraz pręt (rys. 3.6a) obciążony w przekrojach B , C i E momentami M_B^* ,

M_C^* i M_E^* , których wektory pokrywają się z osią pręta ⁽¹⁾. Równowaga pręta wyraża się przy tym warunkiem

$$M_B^* - M_C^* + M_E^* = 0. \quad (a)$$



Rys. 3.6. Przykłady budowy wykresów M_s .

Wektorowy obraz tego obciążenia przypomina obciążenie pręta siłami wzdłużnymi. Takie przedstawienie ułatwia wyznaczenie wysiłku przekrojów. I tak dla przekrojów $a-a$ i $d-d$ z odpowiednich rysunków widać, że ich wysiłek stanowią momenty skręcające

$$M_{sa} = M_B^*, \quad M_{sd} = M_C^* - M_B^* = M_E^*, \quad (b)$$

przy czym, zgodnie z umową, M_{sa} jest ujemny, a M_{sd} dodatni. Wyniki te przedstawiamy na wykresie momentów skręcających w sposób podobny jak budowaliśmy wykres sił normalnych. Wygląd wykresu M_s przypomina wykresy sił normalnych.

Analogicznie badamy przypadek pręta obciążonego w sposób ciągły momentami m^* i utrzymanego w równowadze momentem M_B^* (rys. 3.6b). Wektorowe przedstawienie obciążenia daje obraz jak dla pręta obciążonego siłami masowymi. Z rysunku tego odczytujemy od razu warunek równowagi całości pręta $M_B^* = m^*l$, a z następnego rysunku wysiłek przekroju $a-a$, jako moment skręcający M_{sa}

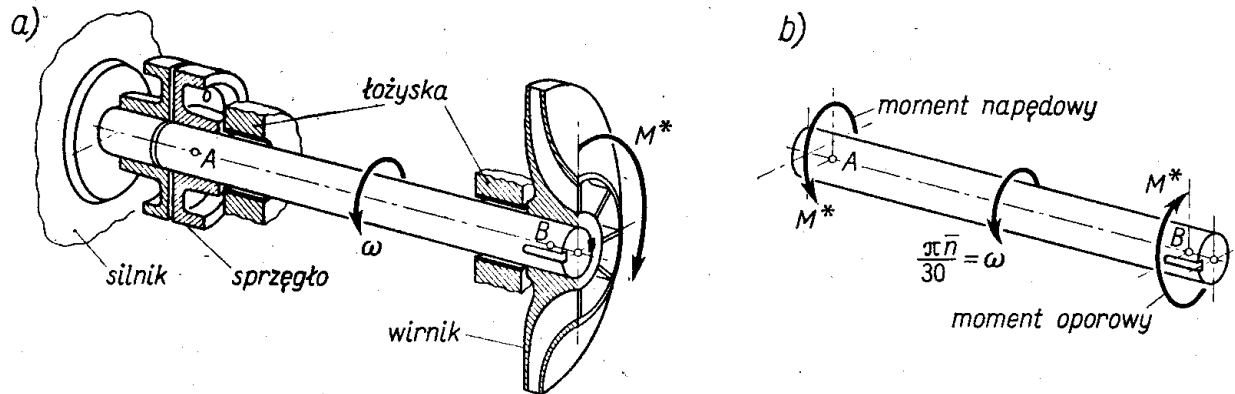
$$M_{sa} = -M_B^* + m^*x = -m^*(l-x). \quad (c)$$

Odpowiadający zależności (c) wykres momentów skręcających ma podobny wygląd jak wykres N (rys. 2.5) pręta rozciąganego.

Uogólniając podane przykłady powiemy, że skręcanie pręta występuje wtedy, gdy obciążenia stanowią momenty o wektorach równoległych do osi pręta. Szczególnie ważny

⁽¹⁾ Symbole momentów zewnętrznych, stanowiących obciążenie pręta, opatrzone są gwiazdką dla odróżnienia od momentu skręcającego M , jako wysiłku przekroju.

w budowie maszyn jest przypadek wału przekazującego napęd z silnika na zespół napędzany, np. wirnik pompy (rys. 3.7). Dostarczona przez silnik moc \bar{N} kW zostaje zużyta na pokonanie oporów ruchu wirnika, wyrażających się istnieniem momentu M^* Nm.



Rys. 3.7. Obciążenie wału napędowego

Jeśli wał robi \bar{n} obr/min, to moc odebrana przez wirnik jest $M^*\omega = M^*\pi\bar{n}/30$ (N m/s, czyli watów) i jest równa mocy silnika wyrażonej też w watach, tj. $1000\bar{N}$. Z porównania tych dwóch wielkości mamy szukaną wartość M^*

$$M^* = \frac{1000 \cdot 30}{\pi} \frac{\bar{N}}{\bar{n}} = 9550 \frac{\bar{N}}{\bar{n}} \text{ Nm}, \quad (3.9)$$

gdzie, jak już powiedziano, \bar{N} jest podane w kilowatach, a \bar{n} w obrotach na minutę. Po tym przeliczeniu otrzymujemy układ obciążeń typowy dla przypadku skręcania (rys. 3.7b).

Zbudowanie wykresu M_x oparte, jak widzieliśmy, na metodzie przecięć jest niezbędnym pierwszym etapem analizy. Etapem następnym jest określenie naprężeń i odkształceń w skręcanym pręcie. W tym miejscu występuje istotna różnica między rozpatrzonym już rozciąganiem lub ściskaniem prętów a zagadnieniem skręcania. O ile bowiem w poprzednim przypadku obraz odkształceń nie zależał od kształtu przekroju, to w przypadku skręcania obraz ten jest *częściowo różny* dla różnych przekrojów. Wspólną cechą przy skręcaniu prętów jest to, że przekroje ich ulegają obrotowi wokół osi pręta. Odmienny natomiast jest obraz odkształceń na bocznej powierzchni pręta. Rozróżnienie tych cech możemy zaobserwować na rys. 3.3. W obecnym ujęciu jest to skręcanie cienkościennej rury. Kąt φ , zwany odtąd *kątem skręcenia*, jest tą wspólną cechą odkształcenia. Obraz odkształceń powierzchni, tzn. przejście tworzącej BE w linię $B'E$, jest tą cechą, która jest różna dla prętów o różnych kształtach przekroju. Ten fakt powoduje, że określenie naprężeń i odkształceń dla przekrojów o różnych kształtach trzeba prowadzić odrębnie.

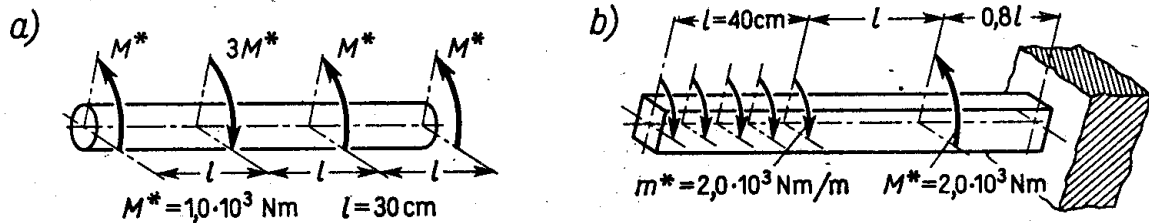
Zadania

1. Jaki moment skręcający działa w przekroju C wałka (rys. 3.6a)?

Odp. Udzielenie odpowiedzi na gruncie wytrzymałości nie jest możliwe, wiadome jest tylko, że w przekroju tuż na lewo od punktu C moment $M_x = -M_B^*$, tuż na prawo od tego punktu $M_x = M_E^*$.

2. Dla podanych prętów (rys. 3.8) wykonać wykresy momentów M , i określić ich ekstremalne wartości (dodatnie i ujemne).

Odp. Dla wałka (rys. 3.8a) odpowiednio $+M^*$ i $-2M^*$, dla wałka (rys. 3.8b) $+1200 \text{ N m}$ i -800 N m .



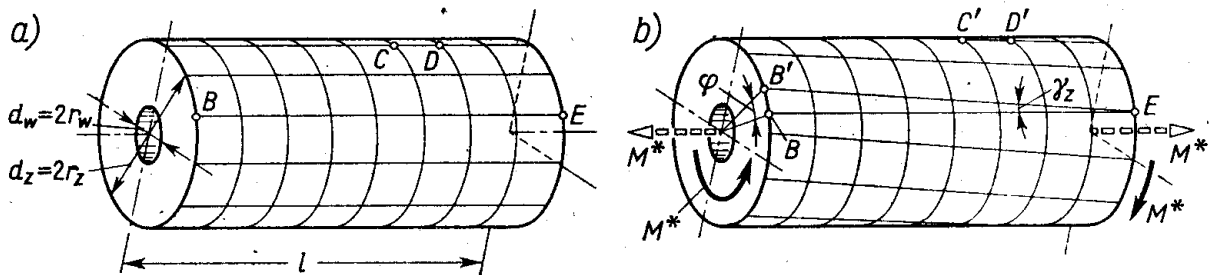
Rys. 3.8.

3. Tak zwany kardanowy wał łączący w samochodzie skrzynkę biegów z tylnym mostem przenosi moc silnika $\bar{N} = 80 \text{ KM}$ przy $\bar{n} = 2800 \div 600 \text{ obr/min}$ zależnie od włączenia różnych „biegów”. Wał wykonany jest jako rura ($2r_{sr} = 5,2 \text{ cm}$, grubość $\delta = 3 \text{ mm}$). Obliczyć ekstremalną wartość naprężenia τ .

Odp. Maksymalny moment wystąpi przy $\bar{n} = 600 \text{ obr/min}$. Moc silnika $\bar{N} = 75 \cdot 80 \text{ kG m/s} = 58900 \text{ Nm/s} = 58,9 \text{ kW}$. Z wzoru (3.9) $M^* = 936 \text{ N m}$, a z (3.5) $\tau = 73 \text{ MPa} \approx 750 \text{ kG/cm}^2$.

3.3. Skręcanie pryzmatycznego pręta o przekroju kołowym

Przedmiotem analizy jest pręt drażony, mający otwór współśrodkowy o średnicy $d_w = 2r_w$ (rys. 3.9a). Analizę skręcania rozpoczynamy od opisu odkształceń. Narysowana na bocznej powierzchni nie obciążonego pręta prostokątna siatka zmienia się po obciążeniu momentami M^* w ukośną (rys. 3.9b). Łuki kół zostają nie zmienione, a wykazują tylko względny obrót. Drugie linie siatki, tj. tworzące, zamieniają się na linie śrubowe o bardzo dużym skoku. W zakresie małych odkształceń stwierdzono również, że długości boków siatki nie ulegają zmianie. Tak więc na powierzchni bocznej dostępnej obserwacjom mamy odkształcenie postaciowe scharakteryzowane kątem γ_z .

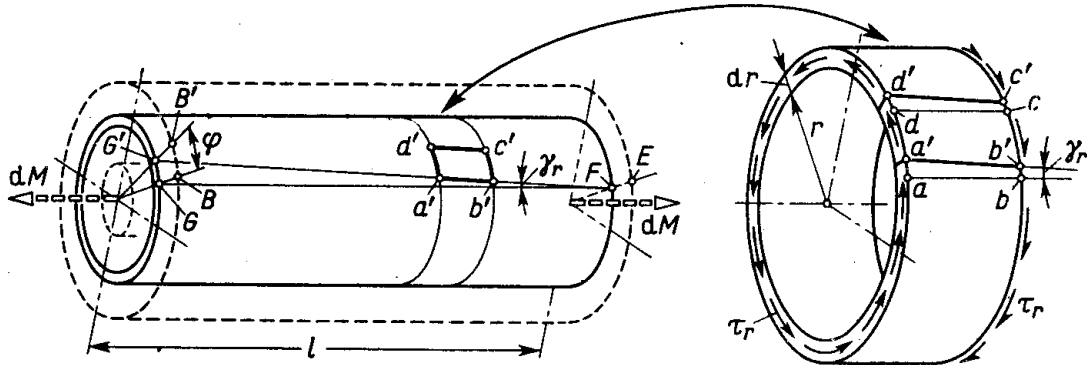


Rys. 3.9. Obraz odkształceń przy skręcaniu pręta kołowego

żeniu momentami M^* w ukośną (rys. 3.9b). Łuki kół zostają nie zmienione, a wykazują tylko względny obrót. Drugie linie siatki, tj. tworzące, zamieniają się na linie śrubowe o bardzo dużym skoku. W zakresie małych odkształceń stwierdzono również, że długości boków siatki nie ulegają zmianie. Tak więc na powierzchni bocznej dostępnej obserwacjom mamy odkształcenie postaciowe scharakteryzowane kątem γ_z .

Powyższe dane doświadczalne nie mówią nic o odkształceniach w niedostępnym wnętrzu pręta. Trudność tę omijamy drogą hipotezy, określającej obraz odkształceń we wnętrzu pręta, a następnie w drodze rozumowania formułujemy takie wnioski, które można sprawdzić doświadczalnie. Pozytywny wynik weryfikacji jest pośrednim dowodem słuszności hipotezy.

Taką hipotezą roboczą jest *hipoteza płaskich przekrojów*. Głosi ona, że przy skręcaniu kołowego pręta poprzeczne przekroje nie doznają żadnych odkształceń, a tylko obracają się wokół osi pręta. Opierając się na tym widzimy (rys. 3.10), że elementarna współśrodkowa



Rys. 3.10. Odkształcenia elementarnej rury wyciętej myślowo ze skręcanego pręta

rura o promieniu r i grubości ścianki dr ulega skręceniu o ten sam kąt φ co i cały pręt. Obraz odkształceń jest identyczny jak w cienkościennej rurze (rys. 3.3). Wykorzystując to wyznaczamy z wzoru (3.6) kąt γ_r odkształcenia postaciowego elementarnej rury

$$\gamma_r = \varphi r / l, \quad (a)$$

przy czym zamiast r_{sr} wstawiono aktualny obecnie promień r . Stosując następnie prawo Hooke'a (3.1) mamy

$$\tau_r = G\gamma_r = G\varphi r / l, \quad (b)$$

jako wartość naprężenia stycznego działającego w poprzecznych przekrojach elementarnej rury. Potrzebny do jej skręcenia moment dM określamy z (3.5) z tym, że obecnie $\delta = dr$,

$$dM = 2\pi r^2 dr \tau_r = (G\varphi / l) 2\pi r^3 dr. \quad (c)$$

Do skręcenia wszystkich takich rur, składających się na badany pręt, potrzebny jest moment równy sumie dM , gdy r zmienia się w przedziale (r_w, r_z) . Z drugiej strony moment ten jest równy obciążającemu momentowi M^* (rys. 3.9). Wynika stąd, że

$$M^* = \frac{G\varphi}{l} \int_{r_w}^{r_z} 2\pi r^3 dr. \quad (d)$$

Oznaczając przez J_0 wartość całki

$$J_0 = \int_{r_w}^{r_z} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi(r_z^4 - r_w^4)}{2} = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{32} \quad (3.10)$$

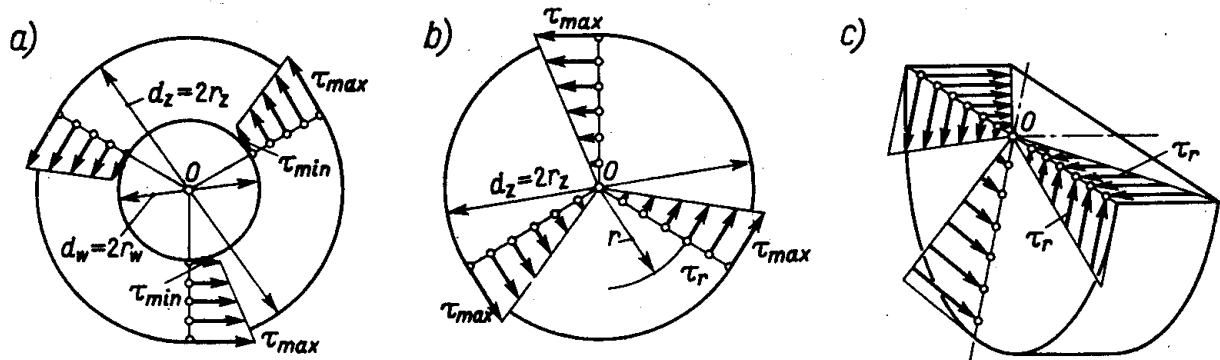
wyznaczamy nie znany dotąd kąt skręcenia

$$\varphi = \frac{M^* l}{GJ_0} \quad \text{rad} \quad (3.11)$$

oraz jego intensywność $\Theta = \varphi / l$, tzw. *względne skręcenie*,

$$\Theta = \frac{M^*}{GJ_0} \quad \text{rad/m}. \quad (3.12)$$

Wielkość ta stanowi wygodną, bo oderwaną od długości pręta, miarę odkształceń przy skręcaniu różnych prętów różnie obciążonych. Jak widać, względne skręcenie θ jest proporcjonalne do momentu M^* , a odwrotnie proporcjonalne do iloczynu GJ_0 , tzw. sztyw-



Rys. 3.11. Rozkład naprężeń τ przy skręcaniu pręta kołowego

ności pręta na skręcanie. Wielkość J_0 jest czysto geometryczna. Dla pręta kołowego ma ona dodatkowo pewien sens fizyczny, gdyż jest to tzw. *biegunowy moment bezwładności przekroju* (art. 4.5).

Mając wartość φ wyznaczamy z wzoru (b) naprężenie

$$\tau_r = \frac{M^* r}{J_0}. \quad (3.13)$$

Maksymalna wartość τ_{\max} odpowiada $r = r_z$ i może być przedstawiona w postaci

$$\tau_{\max} = \frac{M^* r_z}{J_0} = \frac{M^*}{W_0}, \quad (3.14)$$

gdzie $W_0 = J_0/r_z$ — tzw. *wskaźnik wytrzymałości na skręcanie*:

$$W_0 = \frac{\pi d_z^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d_w}{d_z} \right)^4 \right] \approx 0,2 d_z^3 \left[1 - \left(\frac{d_w}{d_z} \right)^4 \right]. \quad (3.15)$$

Gdy pręt jest pełny, wtedy oczywiście we wzorach (3.10) i (3.15) należy wstawić $r_w = 0$.

Z wzoru (3.13) wynika proporcjonalność τ_r do długości promienia r . Ponadto wiemy, że w każdym punkcie przekroju τ_r jest prostopadłe do odpowiedniego promienia. Te cechy dają obraz naprężeń, jak na rys. 3.11a, b. W przekrojach podłużnych (rys. 3.11c) działają również naprężenia styczne o wartościach równych odpowiednim naprężeniom w przekroju poprzecznym (zasada symetrii naprężeń stycznych). Z obrazów tych widać, że materiał pręta w otoczeniu osi jest słabo wykorzystany (małe τ_r) w porównaniu z włóknami zewnętrznymi (τ_{\max}). Bardziej równomierne wykorzystanie materiału dają pręty drażone, które przez usunięcie bezużytecznego środka są lżejsze niż pręty pełne.

Zależności (3.11) i (3.14) wielokrotnie weryfikowano doświadczalnie z wynikiem pozytywnym. Świadczy to o słuszności przyjętej hipotezy. Te same wyniki daje teoria sprężystości, co stanowi jeszcze jeden dowód ich poprawności. Wzory te można stosować tylko w zakresie ważności prawa Hooke'a (wzór b), a więc wtedy, gdy materiał pręta jest sprężysty.

Określmy jeszcze energię U_1 odkształcenia pręta o jednostkowej długości. Traktując

pręt (rys. 3.10) jako zbiór cienkościennych rur, mamy dla jednej z nich energię

$$U'(2\pi r dr \cdot 1) = (\tau_r^2/2G)(2\pi r dr \cdot 1) = (M^{*2}/2GJ_0^2)(2\pi r^3 dr) \cdot 1, \quad (e)$$

gdzie $U' = \tau_r^2/2G$ — właściwa energia odkształcenia. Całkowita energia U_1 pręta jest sumą wyrażen (e), gdy r zmienia się od $r = r_w$ do $r = r_z$. Przy uwzględnieniu (3.10)

$$U_1 = \frac{M^{*2}}{2GJ_0^2} \int_{r_w}^{r_z} 2\pi r^3 dr = \frac{M^{*2}}{2GJ_0} \quad \text{J/m}. \quad (3.16)$$

Z drugiej strony energia U_1 jest równa pracy L_1 , jaką wykona wzrastający stopniowo moment M^* w przekroju B (rys. 3.9b) na rosnącym równocześnie kącie $\varphi = \Theta \cdot 1$ obrotu tego przekroju. Sytuacja jest podobna jak przy rozciąganiu (rys. 2.12), przy czym rolę P spełnia M^* , a rolę Δl kąt φ . W rezultacie

$$L_1 = \frac{1}{2} M^* \Theta = U_1 \quad \text{J/m} \quad (3.17)$$

i po podstawieniu Θ z (3.12) otrzymujemy ten sam wynik (3.16).

Te rozważania ilustrują dwie równoległe metody określenia energii odkształcenia, raz jako sumy energii zgromadzonej we wszystkich elementach ciała, drugi raz jako wynik pracy obciążenia na odpowiednich przesunięciach. Ze spostrzeżenia tego będziemy często korzystać.

Zadania

1. Formułując zależność (3.5) założono, że $\tau = \text{const}$ wzdłuż grubości rury. Z badać dokładność tego założenia.

Odp. Traktując rurę (rys. 3.3) jako wał drażony (rys. 3.11a), w którym $r_z = r_{sr} + (\delta/2)$, $r_w = r_{sr} - (\delta/2)$, otrzymujemy

$$\tau_{sr} = (M^*/2\pi r_{sr}^2 \delta) / [1 + (\delta/2 r_{sr})^2]$$

oraz $\tau_{\max} = \tau_{sr} [1 + (\delta/2 r_{sr})]$, $\tau_{\min} = \tau_{sr} [1 - (\delta/2 r_{sr})]$. Gdy $\delta/2 r_{sr} = 0,1$, wówczas ściśle wartości τ_{sr} , τ_{\max} , τ_{\min} różnią się odpowiednio o $-2,5\%$, $+5\%$, -5% od wartości określonej wzorem (3.5).

2. Obliczyć wartości τ_{\max} i φ dla wałka (rys. 3.9), jeśli $M^* = 1,5 \cdot 10^3$ N m, $d_z = 6$ cm, $d_w = 0$, $l = 2$ m, $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.

Odp. $\tau_{\max} = 35,0$ MPa, $\varphi = 2,95 \cdot 10^{-2}$ rad = $1,69^\circ$.

3. Pręt przenoszący moment $M_s = 3,0 \cdot 10^3$ N m przy warunku $\tau_{\max} \leq 40$ MPa można wykonać jako pełny bądź drażony, przy czym $d_w/d_z = 0,7$. Porównać te warianty z uwagi na ciężar i sztywność.

Odp. W wariacie I jest $d_z = 7,25$ cm; w wariacie II będzie $d_z = 7,96$ cm, $d_w = 0,7 d_z = 5,58$ cm. Stosunek ciężarów 1,63; stosunek kątów skręcenia $\varphi_I/\varphi_{II} = J_{0II}/J_{0I} = 1,10$. Tak więc pręt pełny jest i cięższy, i mniej sztywny niż drażony (przy równych M_s i τ_{\max}).

4. Skręcana momentem $M^* = 5,0 \cdot 10$ N m próbka ($d_z = 2$ cm) wykazała na pomiarowej długości $l = 20$ cm kąt skręcenia $\varphi = 1^\circ 20' = 1,33^\circ$. Jaki jest moduł G sprężystości postaciowej $^{(1)}$

Odp. Z wzoru (3.11) $G = M^*/J_0 \varphi = 2,75 \cdot 10^{10}$ N/m² = $2,75 \cdot 10^4$ MPa.

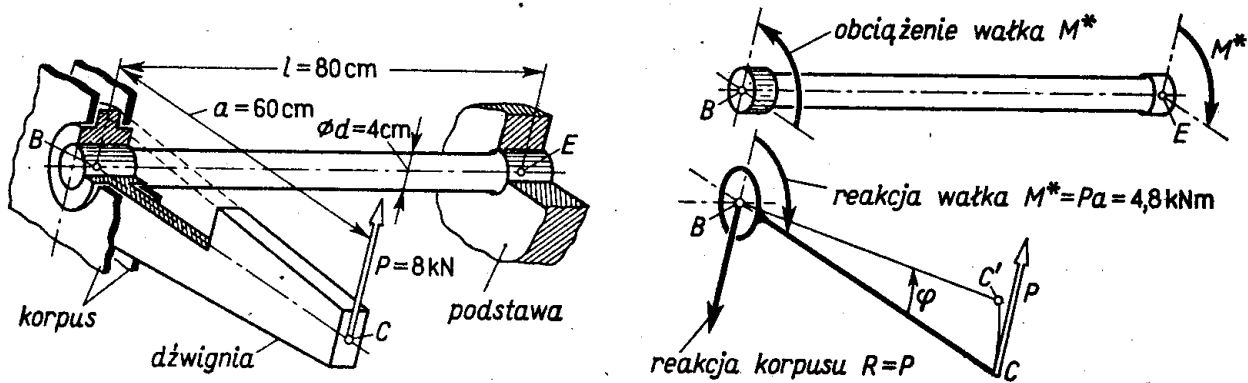
5. W czasie pracy zespołu (rys. 3.7) zmierzono kąt skręcenia $\varphi = 0,180^\circ$ między przekrojami wału odległymi o $l = 50$ cm. Określić moc⁽²⁾ pobieraną przez wirnik, jeśli $\bar{n} = 1450$ obr/min, $d_z = 5$ cm, $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.

⁽¹⁾ Jest to powszechnie stosowana metoda pomiaru G .

⁽²⁾ Jest to jedna ze stosowanych w praktyce metod pomiaru mocy.

Odp. $M^* = \varphi GJ_0/l = 308 \text{ N m}$, $\bar{N} = 47 \text{ kW}$.

6. Osadzona obrotowo w korpusie praktycznie nieodkształcalna dźwignia BC (rys. 3.12) łączy się z wałkiem BE blokującym jej swobodny obrót. Wyznaczyć naprężenie τ_{\max} i energię odkształcenia w wałku oraz przesunięcie punktu C wywołane siłą P . $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

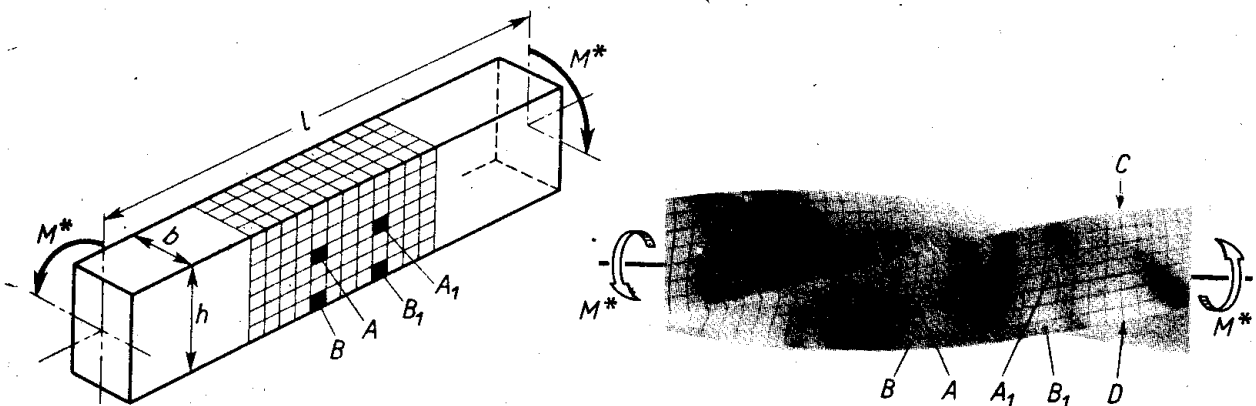


Rys. 3.12.

Odp. Widać z rysunku, że wałek jest skręcany. Moment $M^* = 4,8 \text{ kN m}$, $\tau_{\max} = M^*/W_0 = 382 \text{ MPa}$, energia $U = U_1 l = 457 \text{ J}$, kąt $\varphi = 0,191 \text{ rad}$. Przesunięcie $CC' \approx a\varphi = 11,4 \text{ cm}$ jest dość duże. Tę cechę wykorzystuje się w różnych urządzeniach, jak zawieszania karoserii itp.

3.4. Skręcanie prętów o przekrojach niekołowych

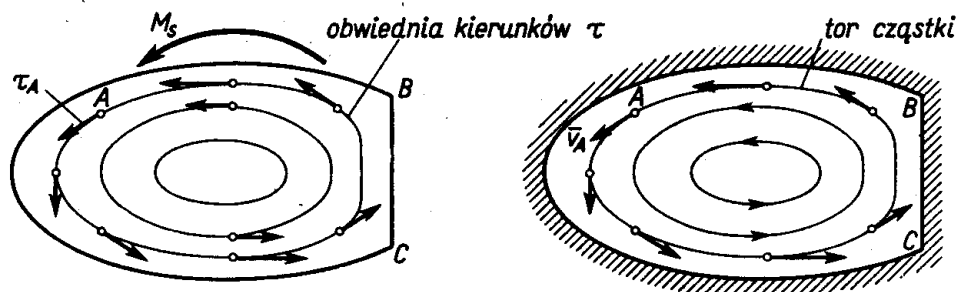
Przy skręcaniu takich prętów, np. o przekroju prostokątnym (rys. 3.13), obserwujemy bardziej złożony obraz odkształceń niż w przypadku pręta kołowego. Nacięta na bocznej powierzchni pręta pierwotnie prostokątna siatka po jego skręceniu odkształca się nie-



Rys. 3.13. Typowy obraz odkształceń bocznej powierzchni skręcanego pręta o niekołowym przekroju

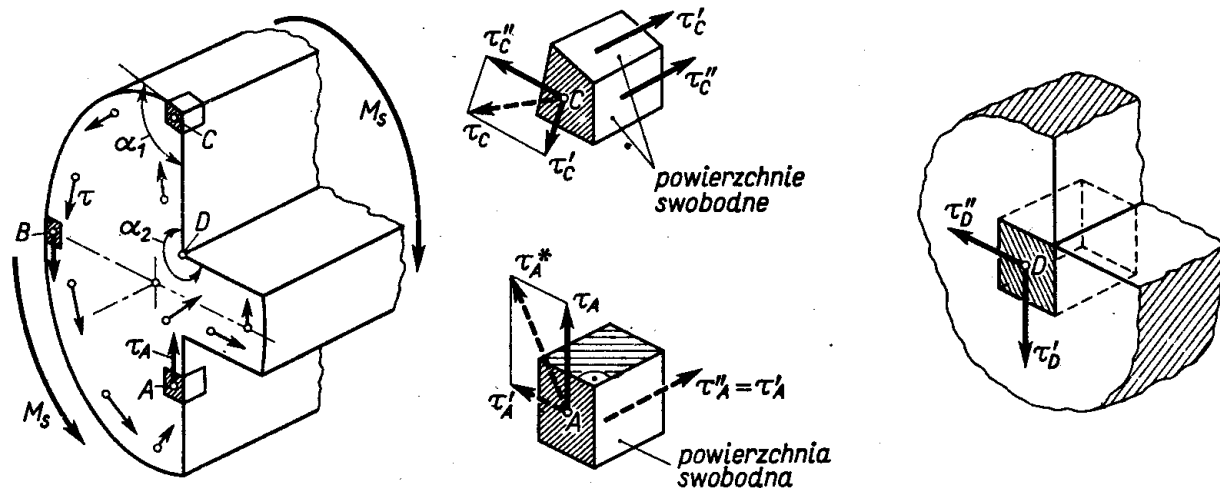
ednak owo, np. oczka A i B . Widać również, że linie pierwotnie proste i prostopadłe do osi pręta, jak linia CD , po skręceniu stają się zakrzywione. Oznacza to, że pierwotny płaski przekrój na pewno nie zostaje płaski. W tych warunkach wykorzystana uprzednio hipoteza płaskich przekrojów przestaje być słuszna. Jej odrzucenie powo-

duje, że dla takich prętów metodami wytrzymałości materiałów nie można na ogół określić ani naprężeń, ani odkształceń.



Rys. 3.14. Obraz naprężeń przy skręcaniu i analogia hydrodynamiczna

Pełne rozwiązanie tego zagadnienia daje teoria sprężystości, a najważniejsze jego wyniki ilustruje rys. 3.14. Pierwszym jest to, że przy skręcaniu każdego pryzmatycznego pręta w jego przekroju poprzecznym istnieją tylko naprężenia styczne τ , których kierunki i wartości są różne w różnych punktach przekroju. Kierunki naprężeń wykazują analogię do prędkości cząstek cieczy nielepkiej i nieściśliwej krążącej ruchem ustalonym w płaskim naczyniu o kształcie identycznym z przekrojem pręta skręcanego. Ta tzw. *analogia hydrodynamiczna* ułatwia uzmysłowienie sobie tego faktu, że obwiednie kierunków τ tworzą linie zamknięte, analogiczne do torów cząstek krążącej cieczy. Wartości naprężeń τ w punktach jednej obwiedni nie są na ogół jednakowe. Zależą one od wymiarów przekroju i momentu skręcającego, nie zależą natomiast od modułu G . Względne skręcenie θ badanego pręta zależy od kształtu i wymiarów przekroju i jest proporcjonalne do momentu skręcającego, a odwrotnie proporcjonalne do modułu G .



Rys. 3.15. Jakościowa analiza obrazu naprężeń przy skręcaniu

Wykorzystując zasadę symetrii naprężeń stycznych możemy ustalić niektóre jakościowe cechy rozkładu naprężeń (rys. 3.15). W elemencie A , którego jedna ścianka leży na bocznej powierzchni pręta, naprężenie τ_A musi mieć kierunek konturu przekroju. Gdyby tak nie było, wówczas wypadkowe naprężenie τ_A^* miałoby składową τ'_A prostopadłą do krawędzi. Na zasadzie symetrii naprężeń stycznych musiałoby istnieć naprężenie $\tau''_A = \tau'_A$ na bocznej

powierzchni pręta. Ta jednak powierzchnia jest swobodna, czyli że $\tau_A'' = 0$, skąd wynika, że i $\tau_A' = 0$. Uogólniając to dla innych elementów, np. B , widzimy, że *naprężenia styczne we wszystkich elementach przekroju przylegających do jego konturu mają kierunek do tego konturu równoległy*.

To samo rozumowanie daje, że w narożach takich jak C , gdzie wewnętrzny kąt $\alpha_1 < \pi$, naprężenia styczne są równe zero. Gdyby bowiem istniało tam naprężenie τ_C , wówczas musiałyby istnieć również jego składowe τ_C' i τ_C'' prostopadłe do odpowiednich krawędzi, a to, jak już wiemy, jest niemożliwe. Inaczej przedstawia się sytuacja w narożach takich jak D , gdzie $\alpha_2 > \pi$. Jak widać, żadna ze ścianek elementu D nie należy do swobodnej powierzchni pręta i zasada symetrii naprężeń stycznych nie daje żadnej informacji o składowych τ_D' i τ_D'' . Odpowiedź otrzymujemy z teorii sprężystości. Okazuje się, że w bezpośrednim otoczeniu naroży o kącie $\alpha_2 > \pi$ naprężenia, przy założeniu idealnej i nieograniczonej sprężystości materiału, są teoretycznie nieskończenie wielkie. Oznacza to, że w tych miejscach (na bardzo małej części przekroju) występują trwałe odkształcenia, nawet gdy obciążenia są bardzo małe.

Wyniki rozwiązań otrzymanych w teorii sprężystości podano w tabl. 3.1, przy czym ograniczono się w zasadzie do informacji niezbędnych w praktycznych zastosowaniach, a mianowicie wartości τ_{\max} i Θ oraz określenia punktów przekroju, w których działa τ_{\max} . Wartości τ_{\max} i Θ łącznie z otrzymanymi poprzednio w art. 3.3 przedstawiono w postaci

$$\tau_{\max} = M_s/W_s, \quad (3.18)$$

$$\Theta = M_s/GJ_s, \quad (3.19)$$

gdzie W_s, J_s — wielkości *czysto geometryczne* zależne tylko od kształtu i wymiarów przekroju. Wielkość W_s zależy od sześciangu wymiaru charakteryzującego dany przekrój, a J_s od jego czwartej potęgi. Innymi słowy wielkości W_s wyrażają się w cm^3 , a J_s w cm^4 . Dla przekroju kołowego W_s i J_s przechodzą w określone poprzednio wielkości W_0 i J_0 i w tym przypadku mają pewien *dotatkowy sens fizyczny*. Podobnie jak w pręcie kołowym iloczyn GJ_s nazywamy *szttywnością na skręcanie*

$$C = GJ_s. \quad (3.20)$$

Ilość energii odkształcenia na jednostkę długości pręta, czyli U_1 , określona jest nadal wzorem (3.16), w którym rolę GJ_0 spełnia teraz sztywność C , czyli

$$U_1 = \frac{M^{*2}}{2GJ_s} = \frac{M^{*2}}{2C} \quad \text{J/m}. \quad (3.21)$$

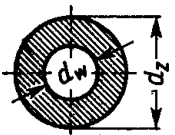
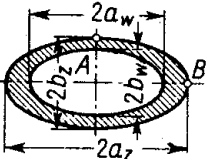
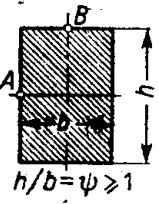

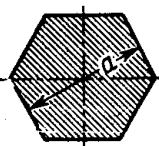
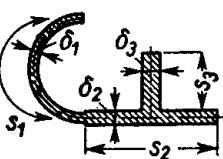
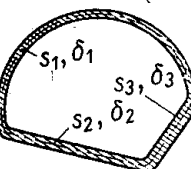
Zadania

1. Dwa pręty o jednakowej długości $l = 100$ cm, jeden o przekroju kwadratowym ($h = b = 5$ cm), drugi o przekroju prostokątnym ($h = 10$ cm, $b = 2,5$ cm) obciążono jednakowymi momentami $M^* = 10^3$ N m (rys. 3.13). W jakim stosunku do siebie są maksymalne naprężenia, kąty skręcenia i energia odkształcenia?

Odp. $\tau_{\max I}/\tau_{\max II} \approx 0,59$, $\varphi_I/\varphi_{II} \approx 0,41$, $U_I/U_{II} \approx 0,41$; pręt o przekroju kwadratowym ma mniejsze naprężenia i jest sztywniejszy od pręta prostokątnego o tym samym ciężarze.

Tablica 3.1

Wielkości W_s i J_s dla różnych przekrojów

Nr	Przekrój	W_s	J_s	Uwagi					
1		$W_s = \frac{\pi}{16} \frac{d_z^4 - d_w^4}{d_z}$	$J_s = \frac{\pi}{32} (d_z^4 - d_w^4)$	τ_{\max} w punktach konturu zewnętrznego					
2		$W_s = \frac{\pi \psi}{2} \frac{b_z^4 - b_w^4}{b_z}$ $a_z/b_z = a_w/b_w = \psi > 1$	$J_s = \frac{\pi}{2} \frac{\psi^3 (b_z^4 - b_w^4)}{\psi^2 + 1}$	$\tau_{\max} = \tau_A$ w punkcie B $\tau_B = \tau_{\max}/\psi$					
3		$W_s = c_1 h b^2 = c_1 \psi b^3$	$J_s = c_2 h b^3 = c_2 \psi b^4$	$\tau_{\max} = \tau_A$, czyli w środkach dłuższych boków, w środkach krótszych boków $\tau_B = c_3 \tau_{\max}$, w narożach $\tau = 0$					
		$h/b = \psi$	1,0		1,5	2	3	6	∞
		c_1	0,208		0,231	0,246	0,267	0,299	0,333
		c_2	0,141		0,196	0,229	0,263	0,298	0,333
c_3	1,000	0,858	0,796	0,753	0,743	0,743			
4		trójkąt równoboczny		τ_{\max} w środkach boków, w narożach $\tau = 0$					
$W_s = \frac{a^3}{20}$	$J_s = \frac{a^4}{46,2}$								
5		sześciokąt foremny		τ_{\max} w środkach boków, w narożach $\tau = 0$					
$W_s = 0,189a^3$	$J_s = 0,115a^4$								
6		cienkościenny profil otwarty		τ_{\max} w środku długich boków odcinka o grubości δ_{\max}					
$W_s = \frac{1}{3 \delta_{\max}} \sum s_i \delta_i^3$	$J_s = \frac{1}{3} \sum s_i \delta_i^3$								
7		cienkościenna dowolna rura		τ_{\max} w miejscu, gdzie grubość δ jest δ_{\min} , F - pole ograniczone linią środkową między zewnętrznym i wewnętrznym konturem					
$W_s = 2F\delta_{\min}$	$J_s = 4F^2 \sum \frac{s_i}{\delta_i}$								

2. Wyznaczyć liczbowe wartości τ_{max} , τ_B , φ i U dla pręta o prostokątnym przekroju z zad. 1, jeśli $G = 2,65 \cdot 10^4$ MPa.

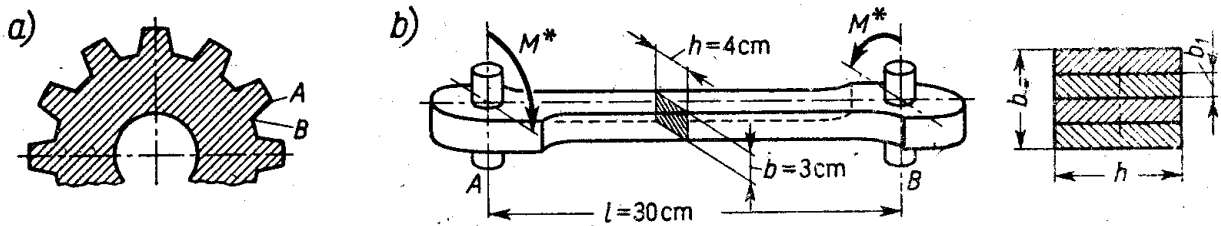
Odp. $\tau_{max} \approx 65$ MPa, $\tau_B \approx 52$ MPa, $\varphi = \theta l = 0,106$ rad $\approx 6,1^\circ$, $U = 53$ J.

3. W pręcie o dowolnym niekołowym przekroju powiększono 1,5 razy wymiary tego przekroju. Jak zmieni się τ_{max} , φ i U ?

Odp. τ_{max} zmaleje w stosunku $1/1,5^3 = 0,297$, φ i U zmaleją w stosunku $1/1,5^4 = 0,198$.

4. Pręty: szklany ($G = 2,4 \cdot 10^4$ MPa) i stalowy ($G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa) o jednakowym (np. eliptycznym) przekroju skręcane są jednakowymi momentami. W którym z nich naprężenia są większe?

Odp. Są jednakowe, albowiem wartości τ nie zależą od modułu G ; różne natomiast są odkształcenia (kąty skręcenia).



Rys. 3.16.

5. W skrzyżkach biegów stosuje się wałki wielowypustowe (rys. 3.16a) pracujące na skręcanie. Wskazać punkty przekroju, w których naprężenia są zerowe, a w których bardzo duże.

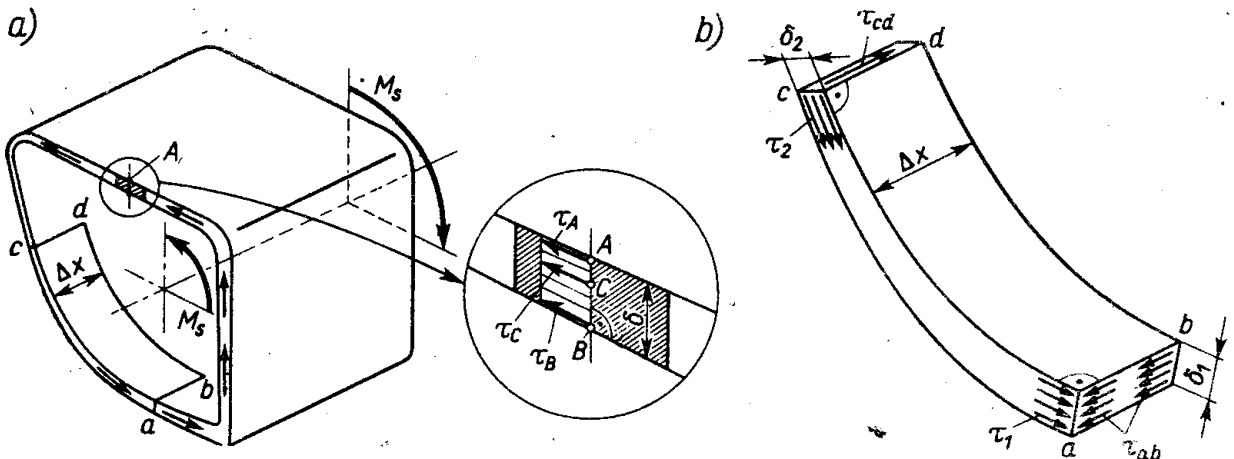
Odp. Pierwszymi są naroża A, drugimi – naroża B (wewnętrzne).

6. Łącznik (rys. 3.16b) wykonano raz jako jednolity pręt o przekroju prostokątnym, drugi raz jako pakiet 20 taśm o grubości $b_1 = 1,5$ mm każda. Jaki jest stosunek τ_{max} w tych konstrukcjach, jeśli w warunkach pracy występuje wymuszone skręcenie A względem B o kąt $\varphi = 5^\circ$? $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.

Odp. $\tau_{maxI} \approx 570$ MPa; w wariancie drugim każda taśma skręca się oddzielnie o ten sam kąt φ , $\tau_{maxII} = 35$ MPa; $\tau_{maxI}/\tau_{maxII} = 16,3$. Widać, że redukcja naprężeń jest bardzo duża.

3.5. Skręcanie rur o dowolnym obrysie

Ogólne reguły z poprzedniego artykułu zastosujemy do przypadku skręcania cienkościennej rury o dowolnym obrysie (rys. 3.17). W przekroju poprzecznym występują tylko naprężenia styczne. Naprężenia τ_A i τ_B w odpowiadających sobie punktach A i B krawędzi



Rys. 3.17. Naprężenia przy skręcaniu cienkościennej rury

zewewnętrznej i wewnętrznej są styczne do tych krawędzi. Widać, że kierunki τ_A i τ_B z uwagi na małą grubość δ ścianki są praktycznie jednakowe. Z racji ciągłości zjawisk, naturalne jest założenie, że w innym punkcie C linii AB , naprężenie τ_C jest równoległe do τ_A i τ_B . Z tych samych powodów wartości τ_A, τ_B, τ_C nie mogą się zbyt różnić i dla celów praktycznych można przyjąć, że *wzdłuż grubości naprężenie τ jest stałe* w danym punkcie obwodu. Nie oznacza to, że wartości τ w różnych punktach obwodu są te same. Aby to zbadać, rozpatrzmy równowagę odcinka $abcd$ płaszcza (rys. 3.17b). Na zasadzie symetrii naprężenia τ_{ab} na boku ab są równe naprężeniom τ_1 w punktach przekroju poprzecznego na krawędzi a . Podobnie τ_{cd} są równe τ_2 , działającym w punktach przekroju poprzecznego na krawędzi c . Równanie równowagi rzutów na kierunek osi rury jest

$$\tau_{ab} \delta_1 \Delta x - \tau_{cd} \delta_2 \Delta x = 0,$$

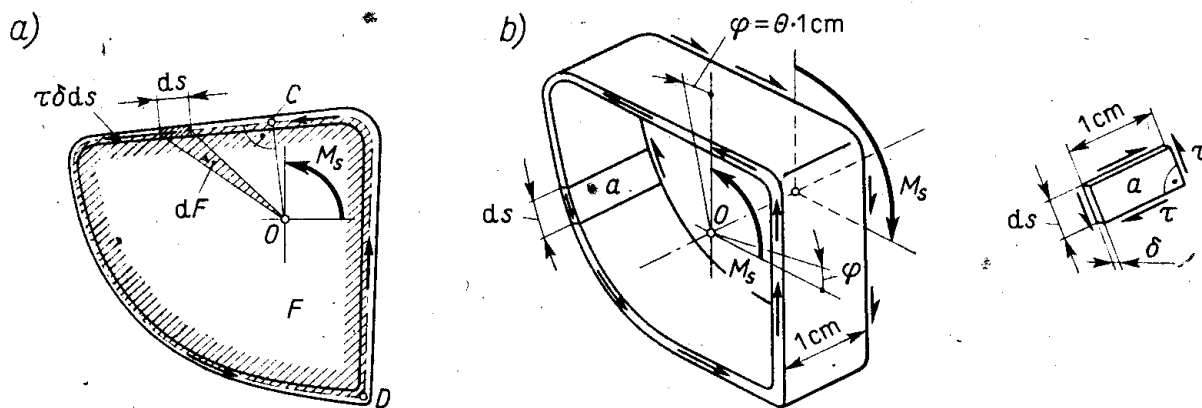
a po podstawieniu $\tau_{ab} = \tau_1$ i $\tau_{cd} = \tau_2$

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2. \quad (a)$$

Ponieważ odcinek płaszcza obrano dowolnie, zatem zależność (a) słuszna jest dla wszystkich punktów obwodu. Tak więc przy skręcaniu cienkościennej rury naprężenia styczne tworzą w przekroju poprzecznym obieg zamknięty i spełniają zależność

$$\tau \delta = \text{const.} \quad (b)$$

Wynika stąd, że naprężenie τ_{\max} występuje w tym miejscu obwodu, gdzie grubość ścianki jest najmniejsza, czyli $\delta = \delta_{\min}$.



Rys. 3.18. Wyznaczenie naprężeń i kąta skręcenia rury

Aby związać znaną wartość M_s z nie znaną jeszcze wartością iloczynu $\tau\delta$, okreśmy wypadkowy moment tych naprężeń. Na pole δds działa siła $\tau\delta ds$ styczna do środkowej linii konturu (rys. 3.18a). Jej moment względem obranego punktu O

$$(\tau\delta ds)\overline{OC} = \tau\delta \cdot 2dF,$$

gdzie dF — pole trójkąta o podstawie ds i wysokości OC . Sumując wszystkie elementarne

momenty, przy uwzględnieniu, że $\tau\delta = \text{const}$, mamy

$$\int \tau\delta \cdot 2 dF = 2\tau\delta \int dF = 2\tau\delta F, \quad (\text{c})$$

gdzie F — całe pole ograniczone środkową linią konturu⁽¹⁾.

Ten wypadkowy moment jest równy wysiłkowi przekroju, tj. M_s , skąd poszukiwana wartość $\tau\delta$ jest

$$\tau\delta = \frac{M_s}{2F} \quad (3.22)$$

oraz wartość τ_{\max} odpowiadająca grubości δ_{\min}

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{2F \delta_{\min}} = \frac{M_s}{W_s}, \quad (\text{d})$$

gdzie $W_s = 2F\delta_{\min}$ sprowadza ten wynik do postaci (3.18).

Względne skręcenie θ wyznaczmy obliczając dwojakim sposobem energię odkształcenia U_1 jednostkowego odcinka (rys. 3.18b). Zgodnie z wzorem (3.4) porcja energii zgromadzona w elemencie o objętości $1 \cdot \delta ds$ jest

$$U'(\delta ds \cdot 1) = (\tau^2/2G)(\delta ds \cdot 1) = M_s^2 ds / 8GF^2 \delta,$$

a całkowita energia równa jest sumie takich porcji

$$U_1 = \oint \frac{M_s^2 ds}{8GF^2 \delta} = \frac{M_s^2}{8GF^2} \oint \frac{ds}{\delta} \quad \text{J/m}, \quad (\text{e})$$

gdzie symbol \oint oznacza sumowanie po obwodzie rury. Z drugiej strony według (3.17) energia $U_1 = M_s \theta / 2$. Porównując to z wynikiem (e) mamy ostatecznie

$$\theta = \frac{M_s}{4GF^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (3.23)$$

Na ogół ścianka rury składa się z odcinków o stałych grubościach δ_i . Oznaczając przez s_i długość odcinka mamy

$$\oint (ds/\delta) = \sum (s_i/\delta_i), \quad (\text{f})$$

a gdy grubość ta jest stała na całym obwodzie s_c , wówczas

$$\oint (ds/\delta) = s_c/\delta. \quad (\text{g})$$

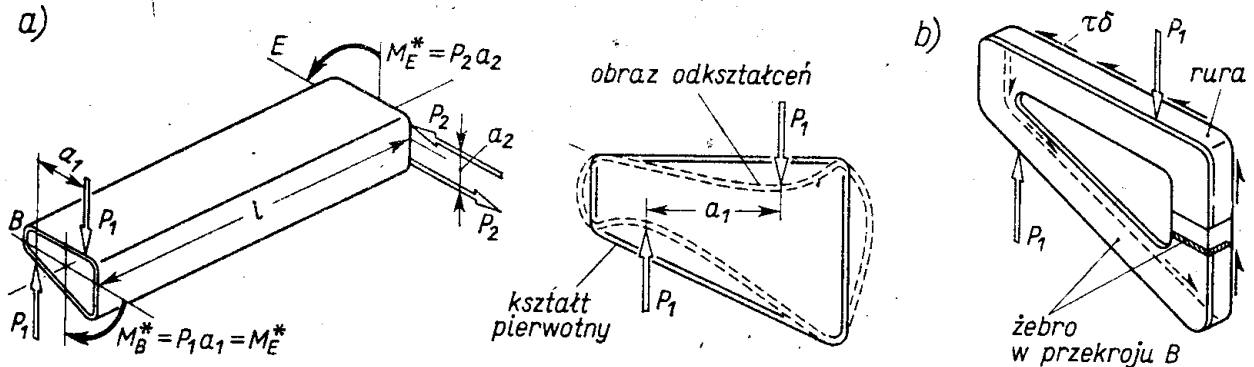
Wynik (3.23) sprowadzamy do postaci (3.19) oznaczając symbolem J_s wielkość czysto geometryczną

$$J_s = 4F^2 / \left(\oint ds/\delta \right). \quad (\text{h})$$

Cienkościenne rury pracujące na skręcanie stanowią przykład konstrukcji racjonalnie wykorzystującej materiał. W porównaniu z prętami o przekroju zwartym (rys. 3.11b)

⁽¹⁾ Odmiennie oznaczenie tego pola, tj. F , podkreśla różnicę tego pojęcia od pola A materialnego przekroju rury.

usunięto tu materiał, który przy skręcaniu jest martwy i stanowi tylko niepotrzebny balast. Równocześnie odsunięcie materiału od osi pręta powoduje zwiększenie sztywności pręta na skręcanie. Tak więc prawidłowo zwymiarowana cienkościenna rura jest konstrukcją i lekką, i sztywną. Aby to jednak osiągnąć, momenty zewnętrzne muszą być

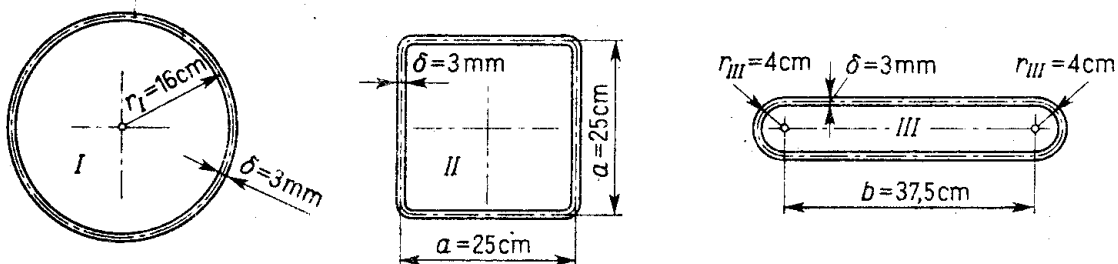


Rys. 3.19. Wprowadzenie obciążeń w cienkościennej rurze
a) przykład obciążenia i odkształceń wadliwej konstrukcji bezżebrowej; b) statyka żebra B.

wprowadzone pod postacią naprężeń τ rozłożonych na obwodzie tak, jak przewiduje przeprowadzona analiza (wzór b). W rzeczywistości momenty zewnętrzne przyłożone są z reguły jako pary sił skupionych P_1 i P_2 (rys. 3.19a). Gdyby tak konstrukcję zostawić, wówczas postulat powyższy nie byłby spełniony, a obraz odkształceń rury byłby krańcowo różny od oczekiwanego. Mianowicie przekrój poprzeczny uległby zniekształceniu i już nawet małe siły P_1 dałyby duże trwałe odkształcenia, a więc zniszczenie ustroju. Aby temu zapobiec, należy w przekroju obciążonym wstawić dostatecznie mocną przegrodę, tzw. żebro. Jego rola polega na zamianie momentu M_B^* pary sił P_1 na taki sam moment naprężeń stycznych τ , ale już rozłożonych na całym obwodzie. Tę funkcję żebra po jego myślowym oddzieleniu od płaszcza widzimy na rys. 3.19b. Podobne żebro musi być wstawione w drugim przekroju E i ogólnie w każdym, w którym wprowadzamy skupione obciążenia zewnętrzne. Nieprzestrzeganie tej reguły jest tzw. błędem sztuki inżynierskiej, świadczącym negatywnie o kwalifikacjach zawodowych.

Zadania

1. Trzy cienkościenne rury stalowe (rys. 3.20) o jednakowej grubości ($\delta = 3 \text{ mm}$), obwodzie ($s_c \approx 100 \text{ cm}$) i długości skręcane są tym samym momentem. W jakim stosunku są do siebie ciężary rur, maksymalne naprężenia styczne i kąty skręcenia?



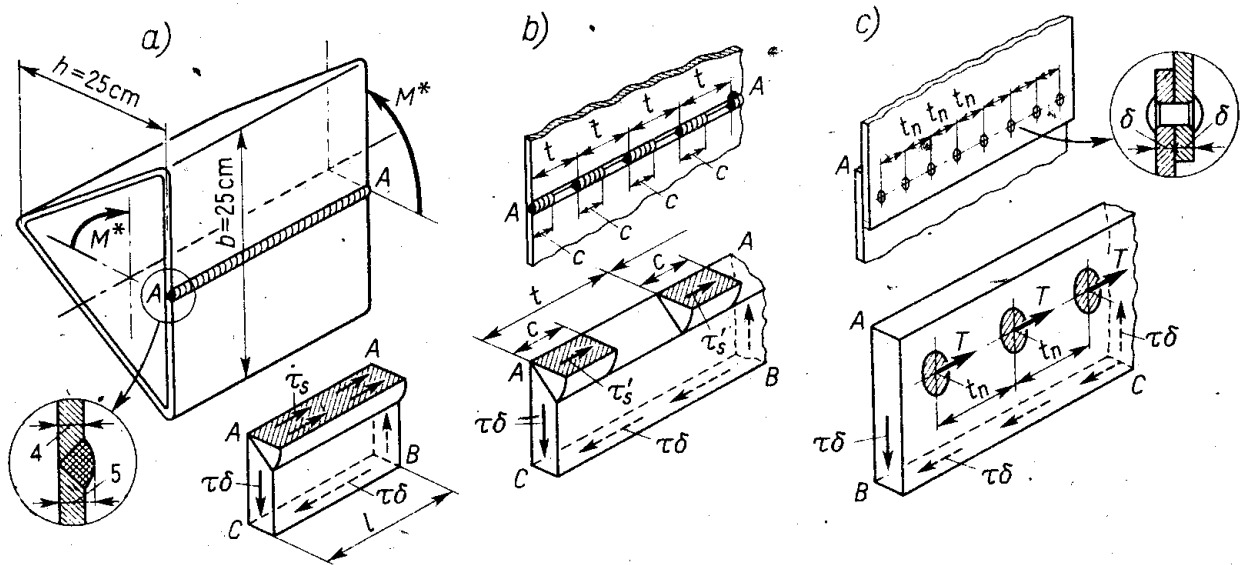
Rys. 3.20.

Odp. Ciężary jednakowe; $\tau_{\max II}/\tau_{\max I} = 1,28$ i $\tau_{\max III}/\tau_{\max I} = 2,28$; $\varphi_{II}/\varphi_I = 1,63$ i $\varphi_{III}/\varphi_I = 5,20$. Najlepsza jest rura kołowa.

2. Wyznaczyć τ_{\max} , φ i współczynnik bezpieczeństwa dla rury II z poprzedniego zadania, jeśli $M_s = 10 \cdot 10^3 \text{ N m}$, $l = 2 \text{ m}$, $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, a $R_e = 240 \text{ MPa}$.

Odp. $\tau_{\max} = 26,7 \text{ MPa}$; z (3.7) $\tau_{pl} = 0,58R_e = 139 \text{ MPa}$, skąd $n_e = 5,2$; $\Theta = 0,266 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$, $\varphi = \Theta l = 0,532 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \approx 0,30^\circ$.

3. Trójkątną rurę wykonano przez zagięcie arkusza blachy ($\delta = 4 \text{ mm}$) i zespawanie brzegów wzdłuż tworzącej A-A (rys. 3.21a), przy czym grubość spoiny $\delta_s = 5 \text{ mm}$. Określić naprężenia w spoinie i w blasze, jeśli $M^* = 6 \cdot 10^3 \text{ N m}$.



Rys. 3.21. Analiza naprężeń w miejscach łączenia płaszcza

Rozwiązanie. Obliczając $F = 0,5hb = 312 \text{ cm}^2$ mamy z (3.22) w blasze $\tau = M_s/2F\delta = 24 \text{ MPa}$. Wartość τ_s w spoinie otrzymamy badając równowagę paska AABC. W przekroju spoiny A-A działa wypadkowa siła $\tau_s \delta_s l$, na boku BC zaś $-\tau\delta l$, skąd $\tau_s \delta_s = \tau\delta$ i $\tau_s = \tau\delta/\delta_s = 19,2 \text{ MPa}$.

4. Jak zmieniają się wyniki zadania 3, jeśli spoinę A-A wykonać odcinkami $c = 4 \text{ cm}$ rozstawionymi co $t = 8 \text{ cm}$ (rys. 3.21b)?

Rozwiązanie. Z analizy równowagi paska AABC otrzymujemy teraz $\tau'_s \delta_s c (l/t) = \tau\delta l$, skąd $\tau'_s = (\tau\delta/\delta_s) (t/c) = 38,4 \text{ MPa}$.

5. Rurę z zadania 3 zamiast spawać znitowano na zakładkę (rys. 3.21c). Zakładając jednakową pracę nitów, określić siłę działającą na jeden nit (podziałka $t_n = 3 \text{ cm}$).

Rozwiązanie. Wydzielamy pasek płaszcza tworzącą BC z jednoczesnym przecięciem wszystkich nitów prostopadle do ich osi. W przekrojach nitów działają jednakowe z założenia i równoległe do tworzącej BC siły T niezbędne do zachowania równowagi. Warunek równowagi daje

$$T(l/t_n) = \tau\delta l,$$

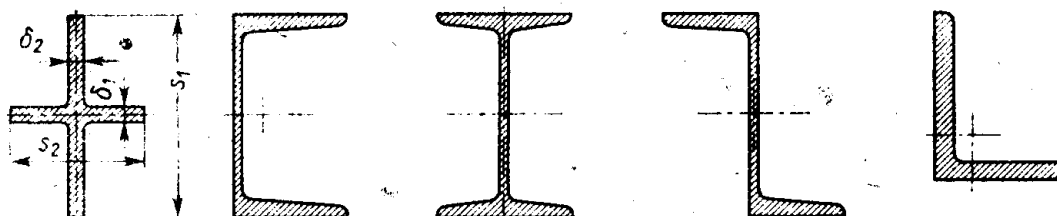
skąd $T = \tau\delta t_n = 24 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 2,88 \cdot 10^3 \text{ N}$

6. W rurze III (rys. 3.20) zwiększono 1,5-krotnie wymiary b i r , a grubość δ zmieniono na $\delta_1 = 2 \text{ mm}$. Jak zmieniają się naprężenia, kąt skręcenia, energia odkształcenia i ciężar rury?

Odp. Ciężar bez zmiany, naprężenia zmniejszą 1,5-krotnie, kąt skręcenia i energia zmniejszą w stosunku $1:(1,5)^2$, tj. 2,25 razy.

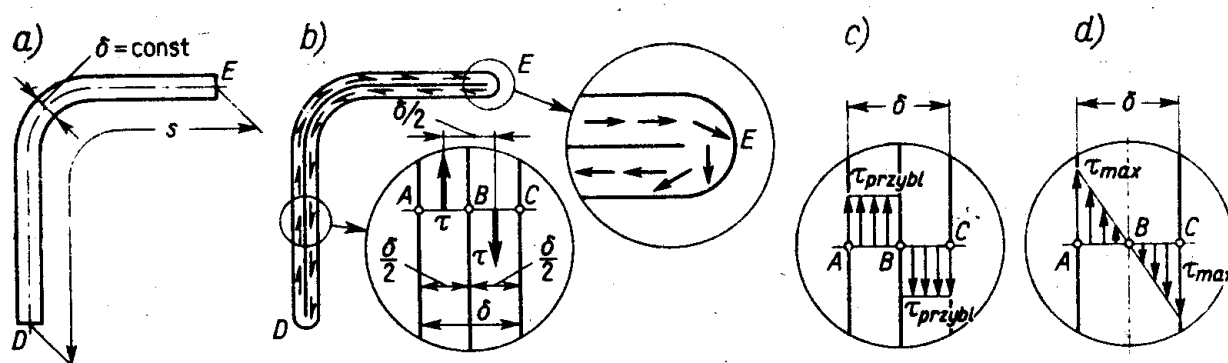
3.6. Skręcanie cienkościennych profili otwartych

Celowość bardziej szczegółowej analizy skręcania takich profili (rys. 3.22) wynika z szerokiego ich stosowania w różnych dziedzinach, jak konstrukcje stalowe, budowa samochodów, płatowców, taboru kolejowego, okrętów itp. Analizę rozpoczniemy od



Rys. 3.22. Przykłady cienkościennych profili otwartych

pręta o stałej grubości δ (rys. 3.23). Pręt ten można wyobrazić sobie, jako wynaturzoną cienkościenną rurę, której ścianki o grubości $\delta' = \delta/2$ przylegają do siebie, i której obwód $s'_c \approx 2s$ (rys. 3.23b). Przy jej skręcaniu naprężenia styczne w przekroju tworzą obieg zamknięty, jak na rys. 3.18. Oznacza to, że na połowie grubości δ , tj. AB , mają one zwrot przeciwny niż na drugiej połowie, tj. BC , a na końcach profilu D i E raptownie „zakręcają”.



Rys. 3.23. Analiza skręcania profilu otwartego o $\delta = \text{const}$

a) obraz przekroju; b) równoważny model rury cienkościennej; c) i d) przybliżony i rzeczywisty rozkład τ wzdłuż grubości.

Gdyby założyć, jak w art. 3.5, że $\tau = \text{const}$ wzdłuż grubości δ' (rys. 3.23c), wówczas z wzorów (3.22) i (3.23) otrzymalibyśmy

$$\tau_{\text{przybl.}} = \frac{2M_s}{s\delta^2}, \quad \Theta_{\text{przybl.}} = \frac{4M_s}{Gs\delta^3},$$

albowiem, jak to widać z rys. 3.23b,

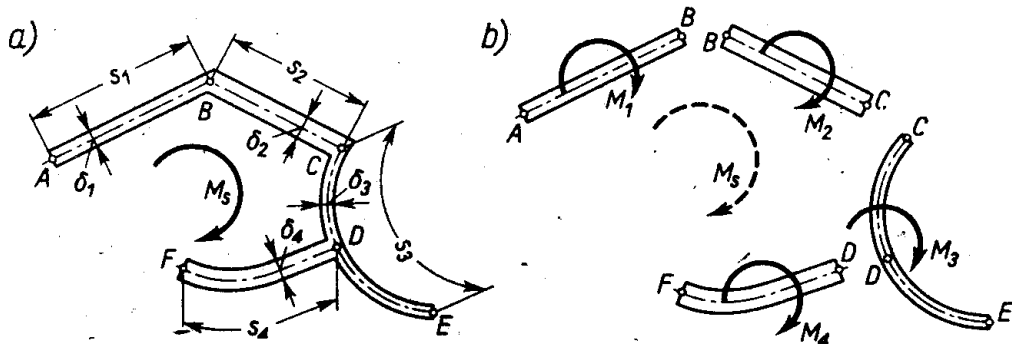
$$F \approx s\delta' \approx 0,5s\delta, \quad \oint (ds/\delta) = s'_c/\delta' = 4s/\delta.$$

W rzeczywistości naprężenia τ zmieniają się wzdłuż grubości w sposób ciągły (rys. 3.23d), a nie skokowo, jak na rys. 3.23c. Jeśli to uwzględnić, to zamiast $\tau_{\text{przybl.}}$ i $\Theta_{\text{przybl.}}$ otrzymujemy

$$\tau_{\text{max}} = 3M_s/s\delta^2, \quad (3.24)$$

$$\Theta = 3M_s/Gs\delta^3, \quad (3.25)$$

gdzie τ_{\max} — wartość naprężeń w punktach konturu przekroju. Widać, że τ_{\max} i Θ nie zależą od kształtu środkowej linii profilu (płaskownik, kątownik, ceówka), o ile tylko s i δ są te same.



Rys. 3.24. Analiza skręcania złożonego profilu otwartego

Przejdźmy do przypadku, gdy otwarty profil składa się z szeregu odcinków s_i o różnych grubościach δ_i (rys. 3.24a). Gdy skręcamy taki profil, wówczas dla wszystkich odcinków kąt skręcenia φ , a więc i Θ jest ten sam. Potrzebne do tego momenty M_1, \dots, M_4 (rys. 3.24b) są zgodnie z wzorem (3.25) równe

$$M_1 = Gs_1 \delta_1^3 \Theta / 3, \quad \dots, \quad M_4 = Gs_4 \delta_4^3 \Theta / 3, \quad (a)$$

a ich suma $M_1 + \dots + M_4 = M_s$, skąd otrzymujemy

$$\Theta = 3M_s / \sum Gs_i \delta_i^3. \quad (b)$$

Podstawiając Θ do wzorów (a) otrzymujemy wartości M_1, \dots, M_4 , a z wzoru (3.24) ekstremalne naprężenia w poszczególnych odcinkach

$$\tau_{\max 1} = 3M_s \delta_1 / \sum s_i \delta_i^3, \quad \dots, \quad \tau_{\max 4} = 3M_s \delta_4 / \sum s_i \delta_i^3. \quad (c)$$

Jeśli wyniki (b) i (c) przedstawić w postaci (3.18) i (3.19), to jako wielkości W_s oraz J_s trzeba wziąć

$$W_s = \sum s_i \delta_i^3 / 3\delta_{\max}, \quad J_s = \sum s_i \delta_i^3 / 3, \quad (3.26)$$

gdzie δ_{\max} — grubość największa ze wszystkich δ_i .

Dokładność wzorów (3.24)–(3.26) jest tym lepsza, im bardziej cienkościenny jest profil. Orientacyjnie biorąc jest ona rzędu 5%, o ile dla wszystkich boków profilu $s_i / \delta_i \geq 10$.

Zadania

1. W dowolnym cienkościennym profilu zmniejszono trzykrotnie długości boków, zwiększając jednocześnie dwukrotnie grubości ścianek. Czy ten zmodyfikowany profil jest mniej, czy bardziej sztywny na skręcanie i czy jest on lżejszy, czy cięższy?

Odp. $(J_s)_{\text{modyf.}} = 2,67 (J_s)_{\text{pierw.}}$, $Q_{\text{modyf.}} = 0,67 Q_{\text{pierw.}}$, a więc zmodyfikowany profil jest lżejszy i sztywniejszy.

2. W rurze (rys. 3.21a) nie zespawano brzegów A-A. Biorąc dane, jak w zadaniu 3 art. 3.5, określić, jak zmieniają się wartości τ i Θ . Moduł $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.

Rozwiązanie. Gdy nie ma spoiny, rura staje się profilem otwartym, w którym $s \approx 81$ cm, $\delta = 0,4$ cm. Wartość τ_{\max} i Θ są teraz

$$\tau_{\max} = 3M_s/s\delta^2 \approx 1390 \text{ MPa}, \quad \Theta = 3M_s/Gs\delta^3 = \tau_{\max}/G\delta = 4,34 \text{ rad/m.}$$

podczas gdy poprzednie wartości były $\tau_0 = 24$ MPa i

$$\Theta_0 = M_s s/4GF^2\delta = \tau_0 s/2GF = 3,89 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m,}$$

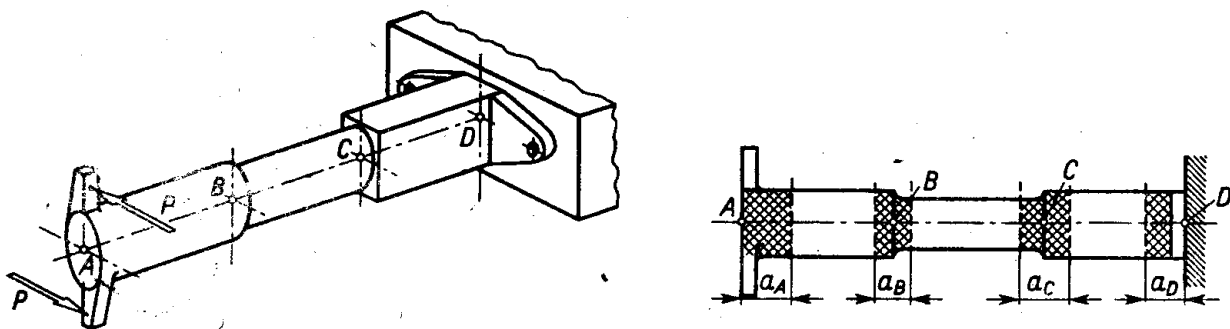
skąd mamy $\tau_{\max}/\tau_0 \approx 58$ i $\Theta/\Theta_0 = (\tau_{\max}/\tau_0)(2F/s\delta) \approx 1110$. Widać, że taka modyfikacja zmienia radykalnie właściwości ustroju. Ponieważ dla większości materiałów wartość $\tau_{pl} \ll \tau_{\max} = 1390$ MPa, taka rozcięta rura ulegnie zniszczeniu.

3. Rurę, jak w zadaniu 3 art. 3.5, o długości $l = 2$ m skręcono o kąt $\varphi = 0,01$ rad. Obliczyć naprężenia, gdy rura jest ze spoiną A-A i gdy tej spoiny nie ma. $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.

Rozwiązanie. Zadanie jest odwrotne do poprzedniego. Wykorzystując wyniki zadania poprzedniego mamy dla rury ze spoiną $\tau_0 = 2GF\Theta_0/s = 2GF\varphi/l_s = 30,8$ MPa, a dla rury bez spoiny $\tau_{\max} = \Theta G\delta = G\delta\varphi/l \approx 1,6$ MPa. Przy takim sformułowaniu zadania naprężenia w rurze rozciętej są o rząd wielkości mniejsze niż w pełnej.

3.7. Przykłady zastosowania teorii

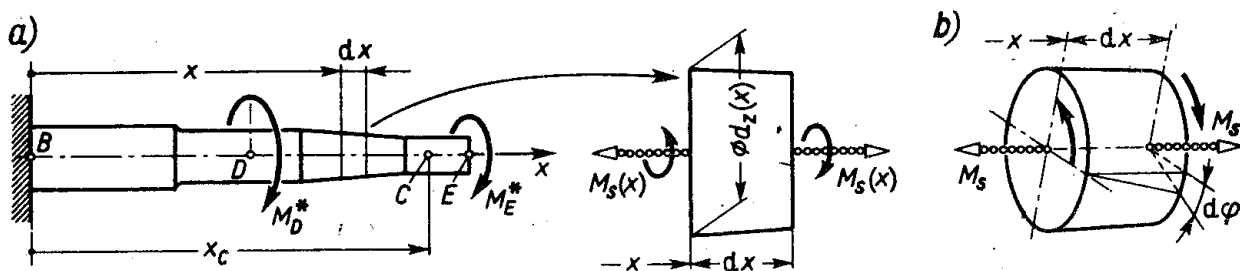
Określenie naprężeń i odkształceń podane w art. 3.3÷3.6 odpowiada najprostszemu obciążeniu pręta momentami przyłożonymi w przekrojach końcowych. Przypadek taki można przyrównać do najprostszego przypadku rozciągania (rys. 1.13), z tym zastrzeżeniem, że ostateczne wyniki określające τ_{\max} i Θ , czyli wzory (3.18) i (3.19), mają odmienny charakter i ciężar gatunkowy niż uniwersalne wzory (1.9) i (1.10) przy rozciąganiu. O ile bowiem wzór (1.9) dawał kompletną informację o naprężeniach σ w każdym punkcie przekroju, to analogiczny wzór (3.18) stanowi jedynie informację wrywkową, dotyczącą jedynie τ_{\max} . Druga różnica — to zależność τ_{\max} nie tylko od wymiarów, lecz i kształtu przekroju. Drastycznym tego przykładem jest zadanie 2 art. 3.6, gdzie na pozór drobna różnica wywołuje ogromne skutki. Z tego powodu obliczenie naprężeń przy skręcaniu



Rys. 3.25. Stosowalność teorii skręcania do obiektów rzeczywistych

musi być zawsze poprzedzone określeniem, do jakiej kategorii należy przekrój pręta (cienkościenny rurowy, kołowy itp.), jakie są charakterystyczne cechy rozkładu τ oraz jak wyrażają się wielkości W_s i J_s w funkcji wymiarów przekroju.

Podobnie jak przy rozciąganiu, tak i w przypadku skręcania przejście od teoretycznego modelu skręcanego pręta do rzeczywistego obiektu w postaci wału maszyny, łącznika itp. podlega pewnym ograniczeniom. Weźmy dla przykładu wałek AD o zmiennym (skokami) przekroju (rys. 3.25). Wprowadzenie momentu w przekroju A pod postacią pary sił P odbiega od teoretycznego modelu, albowiem w przekroju tym nie działają żadne naprężenia styczne. Istniejąca tu sytuacja przypomina analogiczny przypadek wprowadzenia sił wzdłużnych (rys. 2.1) i taka sama jest też odpowiedź. Opierając się mianowicie na zasadzie de Saint-Venanta dopuszczamy stosowanie teoretycznego modelu i wynikających zeń zależności dla przekrojów pręta leżących poza zakratkowanym odcinkiem o długości a_A rzędu średnicy wałka. To samo stwierdzenie dotyczy nagłych zmian przekroju w miejscach B i C (karbów) i w rezultacie przedział stosowalności teoretycznych wzorów ograniczony jest do niezakratkowanych na rys. 3.25 części wałka. Podobnie bez istotnych zmian można przenieść uwagi art. 2.1 w przypadku łagodnej zmienności przekroju, wprowadzenia większej liczby obciążeń itd.



Rys. 3.26. Analiza skręcania pręta, gdy M_s i J_0 są zmienne

Uwzględniając te ograniczenia, przypadek wałka o zmiennej sztywności bądź zmiennym momencie skręcającym (rys. 3.26a) traktujemy jako szeregowe połączenie elementarnych prętów. Każdy z nich traktujemy jak pryzmatyczny o długości dx i poprzecznych wymiarach odpowiadających ich lokalnym wartościom, a naprężenia τ_{\max} wyznaczamy z wzoru (3.18)

$$\tau_{\max} = M_s(x)/W_s(x), \quad (3.27)$$

w którym zarówno M_s , jak i W_s są funkcjami x . Podobnej modyfikacji ulega wzór (3.19)

$$\Theta = M_s(x)/GJ_s(x), \quad (3.28)$$

gdzie $J_s(x)$ — wartość J_s odpowiadająca lokalnym wymiarom przekroju. Na koniec kąt skręcenia φ przekroju C wyrażamy jako sumę elementarnych kątów $d\varphi$ (rys. 3.26b):

$$\varphi = \int_0^{x_c} d\varphi = \int_0^{x_c} \Theta dx = \int_0^{x_c} \frac{M_s(x) dx}{GJ_s(x)}, \quad (3.29)$$

stanowiącą odpowiednik podobnej zależności (2.3) w przypadku rozciągania.

Znajomość τ_{\max} w poszczególnych przekrojach jest niezbędna do oceny bezpieczeństwa całego zespołu metodą naprężeń dopuszczalnych. Ponieważ przy skręcaniu wszystkie elementy pręta są w tym samym stanie napięcia (czyste ścinanie), zatem w najgorszych warunkach znajdują się te elementy, w których naprężenie τ jest maksymalne. Przy wzroście

bowiem obciążenia w punktach tych pojawią się pierwsze trwałe odkształcenia i po odciążeniu pręt wykaże trwałe skrócenie, chociaż inne elementy zostały jeszcze sprężyste. W większości zagadnień budowy maszyn takie trwałe odkształcenia są niedopuszczalne⁽¹⁾. Spełnienie tego postulatu przy uwzględnieniu, że w tych newralgicznych punktach występuje czyste ścinanie, wyraża się warunkiem

$$(\tau_{\max})_{\max} \leq k_t, \quad (3.30)$$

gdzie $(\tau_{\max})_{\max}$ — maksymalna wartość τ_{\max} w niebezpiecznym przekroju, k_t — naprężenie dopuszczalne w stanie czystego ścinania określone wzorem (3.8).

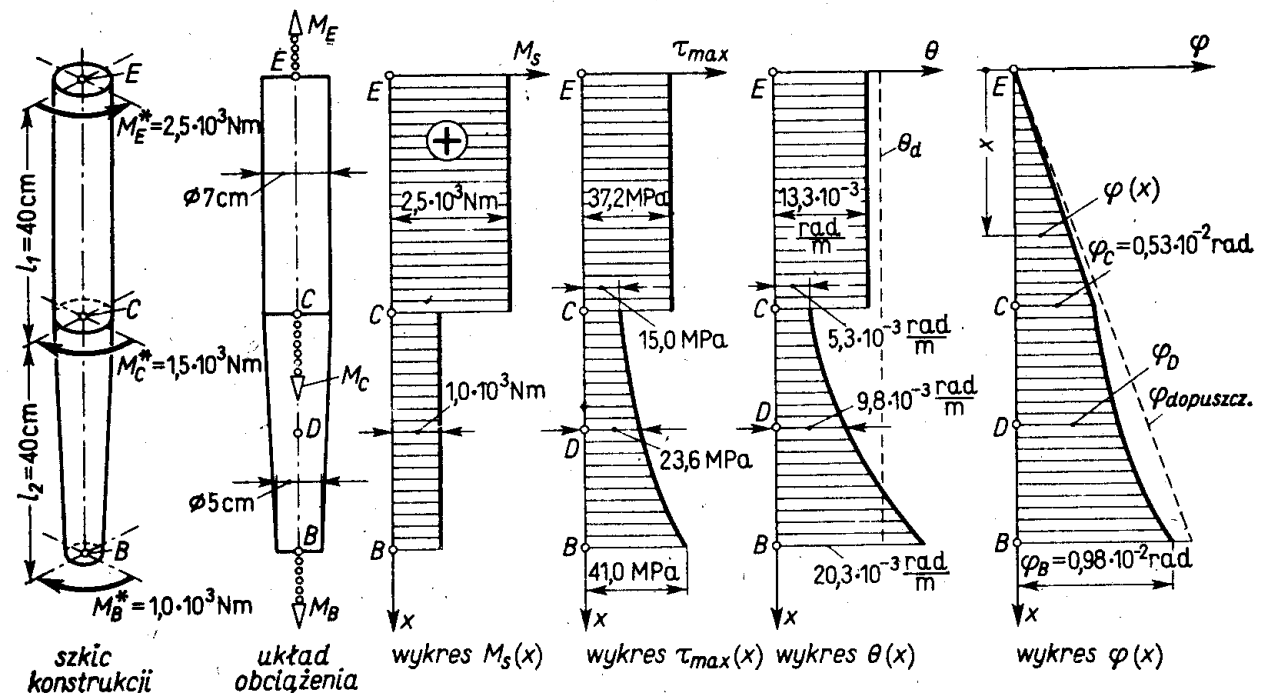
W wielu zagadnieniach równoległe do warunku bezpieczeństwa (3.30) wymaga się, aby kąty skręcenia nie były za duże. Warunek ten ma postać

$$|\Theta|_{\text{sr}} \leq \Theta_d, \quad (3.31)$$

gdzie $|\Theta|_{\text{sr}}$ — średnia absolutna wartość skręcenia względnego między charakterystycznymi przekrojami, Θ_d — wartość nieprzekraczalna ze względów użytkowych.

Zadania

1. Sprawdzić bezpieczeństwo i określić odkształcenia wałka (rys. 3.27), jeżeli $R_e = 300$ MPa, wymagany współczynnik bezpieczeństwa $n_e = 3,5$, zaś $G = 8,0 \cdot 10^4$ MPa.



Rys. 3.27. Przykład analizy pręta skręcanego

Rozwiązanie. Po przedstawieniu obciążenia jako wektorów i zbudowaniu wykresu M_s , obliczamy z (3.27) wartości $\tau_{\max}(x)$. Na przykład w przekrojach B i D, w których

$$(W_s)_B = (W_o)_B = \pi 5^3/16 = 24,5 \text{ cm}^3, \quad (W_s)_D = (W_o)_D = \pi 6^3/16 = 42,4 \text{ cm}^3,$$

⁽¹⁾ Od tego postulatu istnieją wyjątki, omówione w rozdz. 14.

mamy odpowiednio

$$(\tau_{\max})_B = 10^3/24,5 \cdot 10^{-6} \approx 41 \text{ MPa}, \quad (\tau_{\max})_D = 10^3/42,4 \cdot 10^{-6} = 23,6 \text{ MPa}.$$

Z otrzymanego wykresu $\tau_{\max}(x)$ widzimy, że niebezpieczny jest przekrój B , w którym $(\tau_{\max})_B = 41 \text{ MPa}$. Ponieważ $k_t = 0,58 R_e/n_c \approx 50 \text{ MPa}$, zatem postulat (3.30) jest spełniony i konstrukcja jest prawidłowa pod względem wytrzymałości.

Z kolei obliczamy z wzoru (3.28) względne skręcenie $\Theta(x)$. W przekrojach C i D na przykład mamy

$$(J_s)_C = (J_0)_C = \pi 7^4/32 = 236 \text{ cm}^4, \quad (J_s)_D = (J_0)_D = \pi 6^4/32 = 127 \text{ cm}^4,$$

a ponieważ $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa} = 8,0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, więc

$$\Theta'_C = 10^3/8,0 \cdot 10^{10} \cdot 236 \cdot 10^{-8} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m},$$

$$\Theta''_C = 2,5 \cdot 10^3/8 \cdot 10^{10} \cdot 236 \cdot 10^{-8} = 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m},$$

$$\Theta_D = 10^3/8,0 \cdot 10^{10} \cdot 127 \cdot 10^{-8} = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}.$$

Dwie różne wartości Θ'_C i Θ''_C w przekroju C odpowiadają zachodzącej w tym przekroju raptownej zmianie M .

Z wykresu $\Theta(x)$ obliczamy kąt $\varphi(x)$ skręcenia przekrojów względem przekroju E przyjętego za nieruchomy. Zgodnie z wzorem (3.29) dla przekroju x kąt ten

$$\varphi(x) = \int_0^x d\varphi = \int_0^x \Theta dx$$

jest równy polu wykresu $\Theta(x)$ w granicach $0, x$. Na odcinku EC jest $\Theta(x) = \text{const} = 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad/cm}$; daje to w wyniku liniową zależność $\varphi(x)$. Na odcinku CB jest $\Theta(x) \neq \text{const}$ i $\varphi(x)$ obliczamy przez analityczne lub numeryczne całkowanie. Stosując tę drugą metodę obliczmy kąty φ_D i φ_B . Zastępując wykres $\Theta(x)$ dwoma odcinkami prostych mamy

$$\varphi_D = \varphi_C + 0,5 (\Theta'_C + \Theta_D) l_{CD} = 0,53 \cdot 10^{-2} + 0,5 (5,3 + 9,8) 10^{-3} \cdot 0,2 \approx 0,68 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

i podobnie

$$\varphi_B = 0,68 \cdot 10^{-2} + 0,5 (9,8 + 20,3) 10^{-3} \cdot 0,2 = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 0,56^\circ.$$

W wyniku mamy wykres $\varphi(x)$ umożliwiający ocenę sztywności konstrukcji według warunku (3.31). Jeśli przyjąć $\Theta_d = 0,8^\circ/\text{m} \approx 14 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$, to w uznanych za charakterystyczne przekrojach C i B dopuszczalne kąty φ są odpowiednio $0,56 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ i $1,12 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$. Jak widać, są one większe od rzeczywistych, a więc konstrukcja jest prawidłowa⁽¹⁾.

2. Co zmieni się w przykładzie z rys. 3.27, jeśli przekrój C będziemy uważać za nieruchomy?

Odp. Zmiana wystąpi tylko na wykresie $\varphi(x)$ przez przesunięcie osi odciętych tak, aby teraz było $\varphi_C = 0$. Nowe wartości $\varphi_E = -\varphi_C$, $\varphi_B = \varphi_B - \varphi_C$.

3. W wałku (rys. 3.27) zwiększono wszystkie średnice 1,2 razy. Jak zmieniają się wykresy τ_{\max} , Θ , φ ?

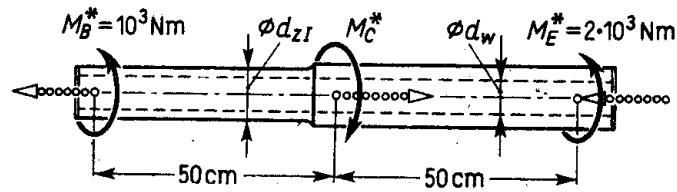
Odp. Wykresy nie zmieniają charakteru, ale zmieniają proporcjonalnie wszystkie rzędne, a mianowicie rzędne τ_{\max} maleją w stosunku $(1,2)^3 = 1,73$ razy, rzędne Θ i φ w stosunku $(1,2)^4 = 2,07$ razy.

4. Stalowy wałek (rys. 3.7) ma spełniać postulat (3.30) przy $k_t = 20 \text{ MPa}$ oraz postulat (3.31) przy $\Theta_d = 0,25^\circ/\text{m} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$. Wyznaczyć średnicę $(d_z)_{\text{graniczne}}$ dla której spełnienie obydwóch postulatów jest jednoczesne. $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.

Odp. $(d_z)_{\text{graniczne}} = 2k_t/G \Theta_d = 11,4 \text{ cm}$.

⁽¹⁾ W rzeczywistości wartość Θ_d jest znacznie mniejsza. W budowie maszyn zazwyczaj $\Theta_d = 0,25^\circ/\text{m} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad/m}$.

5. Wyznaczyć średnice d_{zI} i d_{zII} wałka drążonego, w którym $d_w = 6 \text{ cm} = \text{const}$ (rys. 3.28) i $k_t = 20 \text{ MPa}$. Czy postulat $|\Theta| \leq \Theta_d = 0,33^\circ/\text{m}$ jest spełniony? $G = 8,0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$.



Rys. 3.28.

Odp. Z warunku (3.30) wymagane wskaźniki są $(W_0)_I = 50 \text{ cm}^3$, $(W_0)_{II} = 100 \text{ cm}^3$. Rozwiązując metodą prób równanie (3.15) względem d_z mamy $(d_z)_I = 7,53 \text{ cm}$ i $(d_z)_{II} = 8,69 \text{ cm}$. Postulat $|\Theta| \leq \Theta_d$ spełniony jest dla prawej części, a nie spełniony dla lewej.